بسم الله الرحمن الرحیم

اللهم صل علی محمد و آل محمد و عجل فرجهم

ریاضی (۳)

رشتهٔ علوم تجربی

پایهٔ دوازدهم

دورهٔ دوم متوسطه

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

نام کتاب: ریاضی (۳) پایهٔ دوازدهم دورهٔ دوم متوسطه ـ ۱۱۲۲۱۱

پدیدآورنده: سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

مدیریت برنامه‌ریزی درسی و تألیف: دفتر تألیف کتاب‌های درسی عمومی و متوسطه نظری

شناسهٔ افزوده برنامه‌ریزی و تألیف: سید محمدرضا احمدی، حمیدرضا امیری، علی ایرانمنش، مهدی ایزدی، محمدحسن بیژن‌زاده، خسرو داودی، زهرا رحیمی، محمدهاشم رستمی، ابراهیم ریحانی، محمدرضا سیدصالحی، میرشهرام صدر، اکرم قابل‌رحمت، طاهر قاسمی‌هنری و عادل محمدپور (اعضای شورای برنامه‌ریزی)
رضا حیدری قزلجه، زهرا رحیمی، ابراهیم ریحانی، محمدرضا سیدصالحی، کاظم کمیجانی و علی نیرسالیان (اعضای گروه تألیف)

مدیریت آماده‌سازی هنری: ادارهٔ کل نظارت بر نشر و توزیع مواد آموزشی

شناسهٔ افزوده آماده‌سازی: احمدرضا امینی (مدیر امور فنی و چاپ) ـ جواد صفری (مدیر هنری) ـ مریم نصرتی (صفحه‌آرا) ـ مریم کیوان (طراح جلد) ـ فاطمه رئیسیان فیروزآباد (رسام) ـ بهناز بهبود، سوروش سعادتمندی، علی نجمی، علی مقتدری‌نظرنژاد، فریبا سیر و راحله زادفتح‌اله (امور آماده‌سازی)

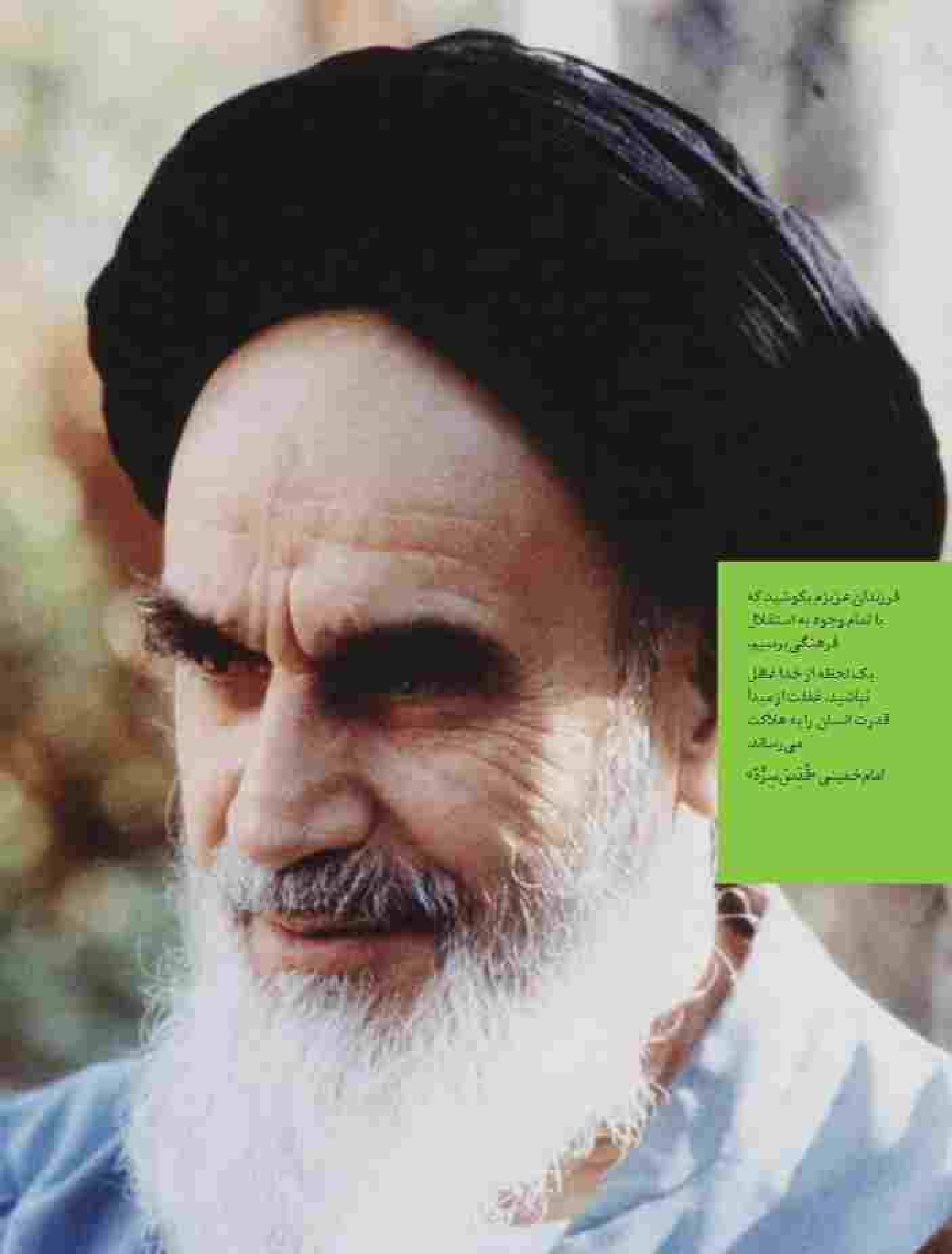
نشانی سازمان: تهران: خیابان ایرانشهر شمالی ـ ساختمان شمارهٔ ۴ آموزش و پرورش (شهید موسوی)
تلفن: ۹-۸۸۸۳۱۱۶۱، دورنگار: ۸۸۳۰۹۲۶۶، کد پستی: ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹
وبگاه: www.irtextbook.ir و www.chap.sch.ir

ناشر: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران: تهران ـ کیلومتر ۱۷ جادهٔ مخصوص کرج ـ خیابان ۶۱ (داروپخش) تلفن: ۵-۴۴۹۸۵۱۶۱، دورنگار: ۴۴۹۸۵۱۶۰، صندوق پستی: ۱۳۹-۳۷۵۱۵

چاپخانه: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران «سهامی خاص»

سال انتشار و نوبت چاپ: چاپ ششم ۱۴۰۲

شابک ۴-۳۱۱۷-۰۵-۹۶۴-۹۷۸
ISBN: 978-964-05-3117-4

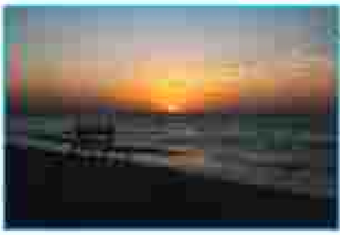


فرزندان عزیزم بکوشید که
با تمام وجود به استقلال
فرهنگی برسید

یک لحظه از خدا غافل
نباشید. غفلت از مبدأ
قدرت انسان را به هلاکت
می‌رساند

امام خمینی قدّس سرّه

فهرست



مقدمه

کتاب حاضر در راستای برنامهٔ درسی ملی و در ادامه تغییر کتاب‌های ریاضی دورهٔ دوم متوسطه تألیف شده است. یکی از تفاوت‌های مهم این کتاب با کتاب قبلی مربوط به دوره پیش‌دانشگاهی، کاهش قابل ملاحظه محتوا است. همانند پایه‌های قبلی، ساختار کتاب براساس سه محور اساسی فعالیت، کار در کلاس و تمرین قرار گرفته است. از این میان، «فعالیت‌ها» موقعیت‌هایی برای یادگیری و ارائه مفاهیم جدید ریاضی فراهم می‌کند و این امر مستلزم مشارکت جدی دانش‌آموزان است. البته معلم هم در این میان نقشی مهم برای راهنمایی و هدایت کلی فعالیت‌ها به عهده دارد. با توجه به اینکه کتاب برای دانش‌آموزان سطح متوسط طراحی شده است، با درنظر گرفتن شرایط مختلف، امکان غنی‌سازی فعالیت‌ها و یا ساده‌سازی آنها به وسیله معلم وجود دارد. در هرحال تأکید اساسی مؤلفان، محور قرار دادن کتاب درسی در فرایند آموزش است. در همین راستا توجه به انجام فعالیت‌ها در کلاس درس و ایجاد فضای بحث و گفت‌وگو و دادن مجال به دانش‌آموز برای کشف مفاهیم به‌طور جدی توصیه می‌شود. زمان کلاس درس نباید به مباحثی خارج از اهداف کتاب درسی اختصاص یابد. همچنین نباید آزمون‌های مختلف خارج از مدرسه مبنای آموزش مفاهیم در کلاس درس واقع شوند، بلکه این کتاب درسی است که سطح و سبک آزمون‌ها را مشخص می‌کند. در بسیاری از موارد درباره یک مفهوم، حد و مرزهایی در کتاب رعایت شده است که رعایت این موضوع در ارزشیابی‌ها و آزمون‌های رسمی برای همه طراحان الزامی است. رعایت این محدودیت‌ها موجب افزایش تناسب بین زمان اختصاص یافته به کتاب و محتوای آن خواهد شد. شایسته است همکاران ارجمند بر رعایت این موضوع نظارت دقیق داشته باشند. روند کتاب نشان می‌دهد که ارزشیابی باید در خدمت آموزش باشد. در واقع ارزشیابی باید براساس اهداف کتاب باشد و به موضوعاتی که احیاناً پیش از این، سال‌ها به صورت سنتی ارائه شده‌اند و یا توسط برخی از کتاب‌های غیراستاندارد توصیه می‌شوند. طرح این گونه سؤالات که اهداف آموزشی کتاب را دنبال نمی‌کنند در کلاس درس و نیز در ارزشیابی‌ها، به هیچ عنوان توصیه نمی‌شود. ارتباط بین ریاضیات مدرسه‌ای و محیط پیرامون و کاربردهای این دانش در زندگی روزمره، که به وضوح در اسناد بالادستی مورد تأکید قرار گرفته است، به صورت تدریجی خود را در کتاب‌های درسی نشان می‌دهد. تلاش برای برقراری این ارتباط در تصاویر کتاب نیز قابل مشاهده است که امید است مورد توجه معلمان و دانش‌آموزان عزیز قرار گیرد.

اگر مهم‌ترین هدف آموزش ریاضی را پرورش تفکر ریاضی بدانیم، دیگر استفاده افراطی از فرمول‌ها، الگوریتم‌ها، قواعد و دستورها بدون آگاهی از چگونگی و چرایی عملکرد آنها، جایگاهی در آموزش ریاضی مدرسه‌ای نخواهد داشت. فرصت حضور دانش‌آموز در کلاس درس را نباید به سادگی از دست داد. فرایندهایی مانند استدلال، تعمیم، حل مسئله، طرح مسئله و

موضوعاتی نظیر مسائل باز پاسخ، بازنمایی‌های چندگانه و گفتمان ریاضی نقش مهمی در پرورش تفکر ریاضی دانش‌آموزان دارد.
مؤلفان از کلیه امکانات موجود نظیر سامانه اعتبارسنجی، وبگاه گروه ریاضی دفتر تألیف، پیام‌نگار (ایمیل)، دعوت از دبیران مجرب برای حضور در جلسات نقد و بررسی کتاب و دیگر رسانه‌های در دسترس برای دریافت دیدگاه‌ها، نقدها و نظرات دبیران محترم سراسر کشور بهره گرفته‌اند. در راستای مشارکت دبیران محترم ریاضی، پاره‌ای از تصاویر و عکس‌های مورد استفاده در کتاب توسط این عزیزان از استان‌های مختلف کشور به گروه ریاضی ارسال شده است، که لازم است از زحمات آنها تشکر و قدردانی شود. اعضای تیم تألیف به حضور و مشارکت جدی همکاران ارجمند در امر نقد و بررسی کتاب افتخار می‌کنند. امید که همچنان شاهد این تعامل و ارتباط مؤثر باشیم. گروه تألیف آمادگی دریافت نظرات و دیدگاه‌های تمامی همکاران و اساتید را از طریق پیام‌نگار[1] و وبگاه واحد تحقیق، توسعه و آموزش ریاضی[2] دارد. به علاوه بسیاری از مطالب مربوط به پشتیبانی کتاب از طریق وبگاه واحد ریاضی قابل دریافت است.

مؤلفان

---

1. mathdep@gmail.com
2. http://math-dept.talif.sch.ir

فصل ۱

تابع

پل سفید ـ اهواز

پل سفید اهواز یکی از پل‌های شهر اهواز است که یکی از نمادهای این شهر نیز محسوب می‌شود. این پل در سال ۱۳۱۵ بر روی رودخانهٔ کارون ساخته شده است که دارای دو قوس فلزی ۱۲ و ۲۰ متری است.

درس اول

توابع چند جمله‌ای ـ توابع صعودی و نزولی

توابع چند جمله‌ای:

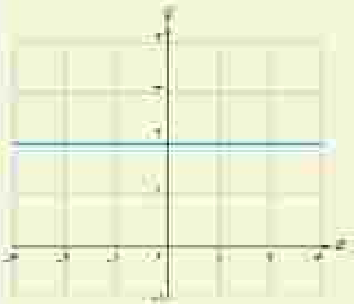
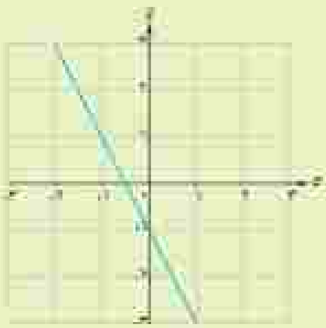
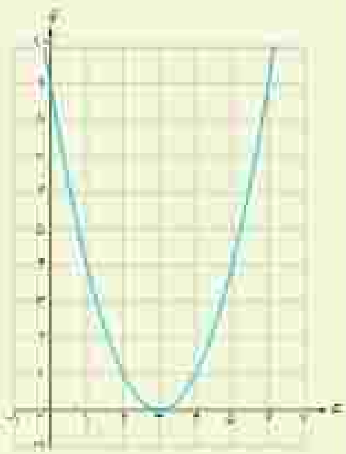
در سال‌های گذشته با تابع خطی آشنا شدیم. هر تابع با ضابطهٔ $f(x)=ax+b$ را یک تابع خطی می‌نامیم. اگر $a=0$، تابع به‌صورت $f(x)=b$ درمی‌آید که آن را تابع ثابت می‌نامیم. توابع ثابت و توابع خطی، مثال‌هایی از توابع چند جمله‌ای با درجه‌های ۰ و ۱ هستند.

هر تابع به‌صورت $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$ را که در آن a_n، a_{n-1}، ...، a_2، a_1، a_0 اعداد حقیقی و n یک عدد صحیح نامنفی و $a_n\neq 0$ باشد، یک تابع چند جمله‌ای از درجهٔ n می‌نامیم. دامنهٔ توابع چند جمله‌ای مجموعهٔ اعداد حقیقی است.

مثال: توابع زیر نمونه‌ای از توابع چند جمله‌ای به‌ترتیب از درجهٔ ۱، ۲، ۳ و ۵ هستند.

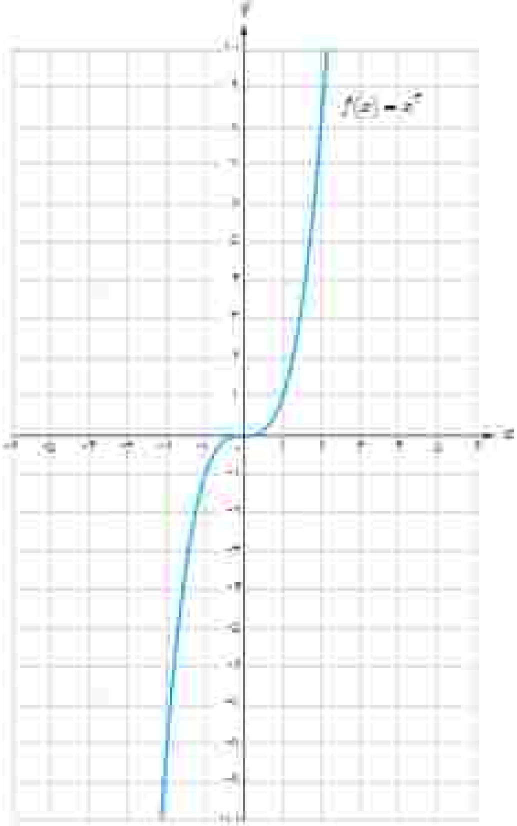
$$y=3x+5 \quad , \quad y=-8x^2+2x-\frac{1}{2} \quad , \quad y=\sqrt{2}x^3-\frac{3}{4}x \quad , \quad y=2x^5-4x^3+\sqrt{7}x^2$$

انواع توابع چند جمله‌ای که تا به حال با آنها آشنا شده‌ایم به‌صورت زیر است:

درجهٔ تابع	۰	۱	۲
نام تابع	ثابت	خطی	درجهٔ دوم
ضابطهٔ کلی	$f(x)=b$	$f(x)=ax+b$ $(a\neq 0)$	$f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$
	$f(x)=2$	$f(x)=-2x-1$	$f(x)=x^2-6x+9$
مثال			

تابع درجهٔ ۳:

تابع چند جمله‌ای با ضابطهٔ $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$ یک تابع درجهٔ ۳ است که در اینجا به‌طور خاص تابع $f(x)=x^3$ را بررسی می‌کنیم. دامنه و برد این تابع $\mathbb{R}$ است. ابتدا به کمک نقطه‌یابی نمودار این تابع را رسم می‌کنیم:



x	$f(x)=x^3$
-۲	-۸
-۱	-۱
$-\frac{۱}{۲}$	$-\frac{۱}{۸}$
۰	۰
$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۸}$
۱	۱
۲	۸

خواندنی

الگوی کلی لانهٔ زنبور عسل به‌صورت یک شش‌ضلعی است که در دور اول با شش تا شش‌ضلعی دیگر احاطه شده است، در دور دوم با دوازده تا شش‌ضلعی احاطه می‌شود و به همین ترتیب در دورهای دیگر تعداد شش‌ضلعی‌ها با الگوی خاصی افزایش می‌یابد.

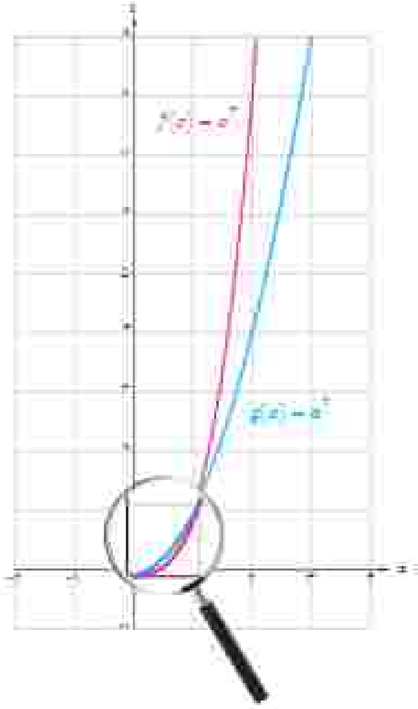
تعداد کل این شش‌ضلعی‌ها را می‌توان با تابع درجه دوم $f(x)=3x^2-3x+1$ به دست آورد که x تعداد دورهاست. آیا می‌توانید تعداد کل شش‌ضلعی‌ها را برای $x=۱،۲،۳$ به دست آورید؟

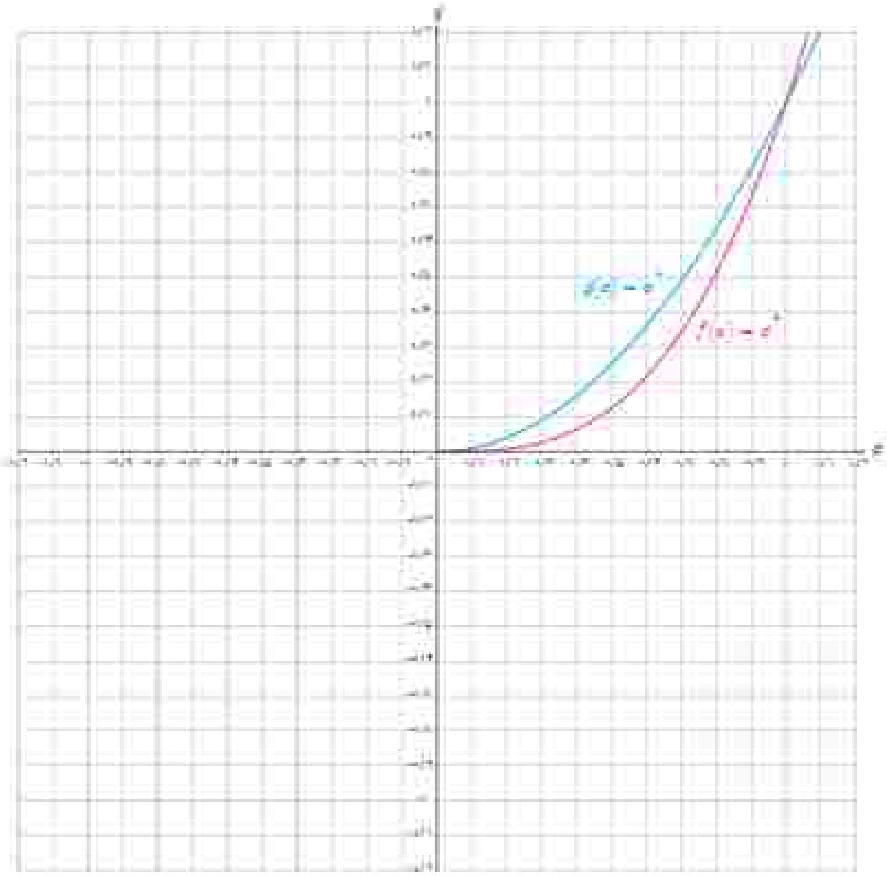
فعالیت

با توجه به نمودار توابع $f(x)=x^3$ و $g(x)=x^2$ که برای اعداد نامنفی رسم شده‌اند:

الف) آیا برای تمام xهای نامنفی، نمودار $f(x)=x^3$ بالای نمودار $g(x)=x^2$ قرار دارد؟

ب) نمودار این دو تابع را در بازهٔ $[-1, 1]$ رسم کنید.





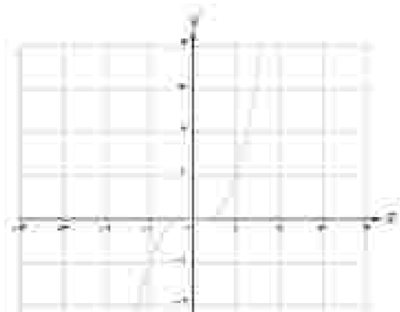
فعالیت

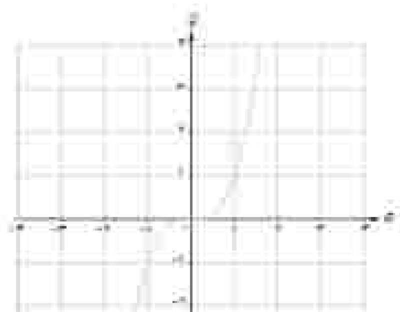
با استفاده از نمودار تابع $f(x)=x^3$، نمودار توابع زیر را رسم کرده و دامنه و برد آنها را مشخص کنید.

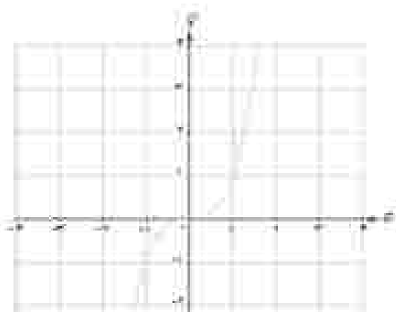
الف) $y=-x^3-2$

ب) $y=(x+2)^3$

پ) $y=-(x-2)^3$







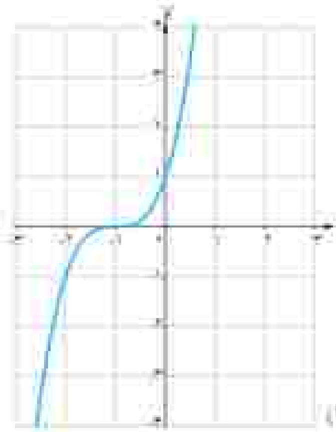
کار در کلاس

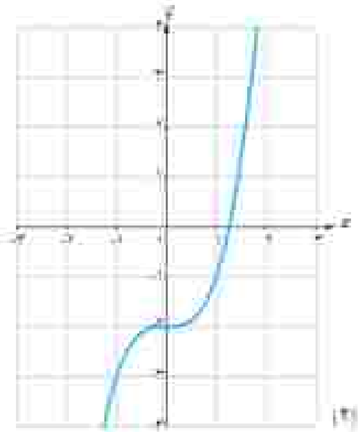
به کمک نمودار تابع $y=x^3$، ضابطهٔ هر تابع را به نمودار آن نظیر کنید.

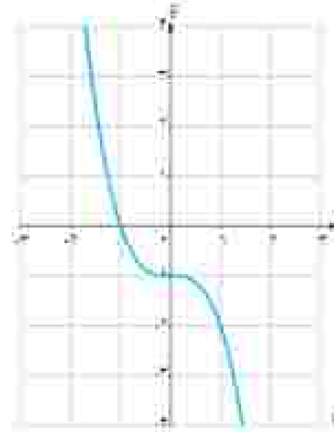
الف) $y=(x-1)^3+2$ ب) $y=(x-2)^3$ پ) $y=-x^3+1$

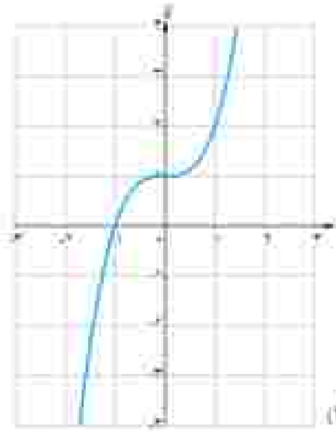
ت) $y=(x+1)^3-1$ ث) $y=-x^3$ ج) $y=(x+1)^3$

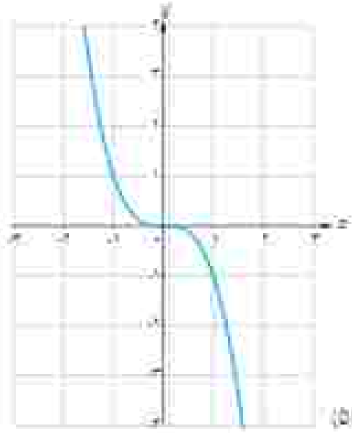
چ) $y=x^3+1$ ح) $y=-x^3-1$ خ) $y=x^3-2$

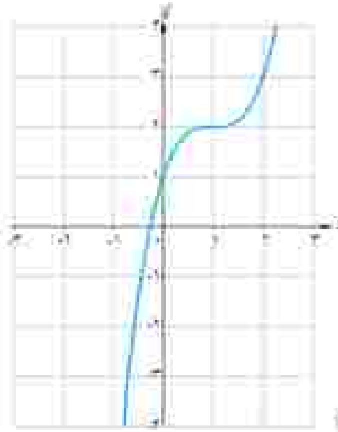

(۱)

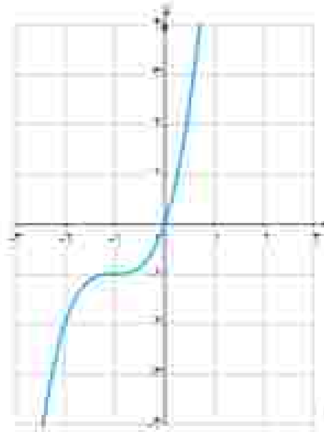

(۲)

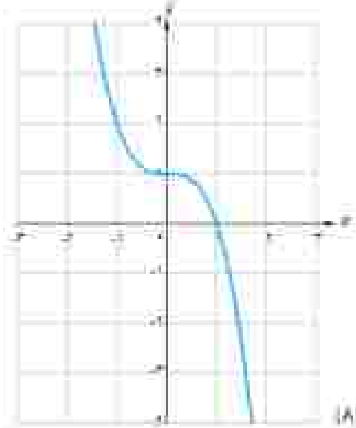

(۳)

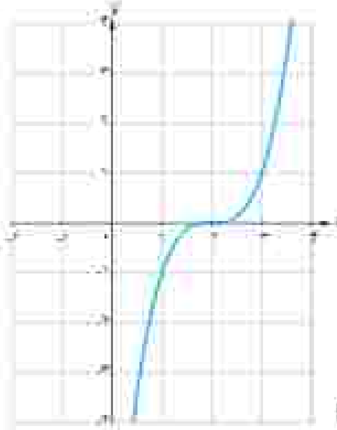

(۴)


(۵)


(۶)


(۷)


(۸)


(۹)

توابع صعودی و توابع نزولی:

فعالیت

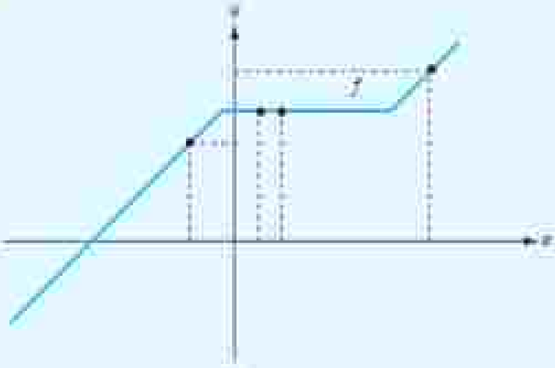
یکی از دغدغه‌های ما ایرانی‌ها در اکثر سال‌ها، بحث کاهش بارندگی در کشورمان است که خسارات بسیاری را به بار می‌آورد. در نمودار زیر میزان بارندگی سالانه سه شهر گرگان، زاهدان و ارومیه از سال ۱۳۷۵ تا سال ۱۳۹۴ (برحسب میلی‌متر) آورده شده است. به‌طور مثال در شهر ارومیه در سال ۸۵، میزان بارندگی ۳۷۲ میلی‌متر و در سال ۹۰، ۳۳۴ میلی‌متر بوده است که روند نزولی بارندگی را در این شهر نشان می‌دهد. همچنین در شهر گرگان در سال ۸۵، میزان بارندگی ۵۲۲ میلی‌متر و در سال ۹۰، ۷۲۴ میلی‌متر بوده است که روند صعودی بارندگی را در این شهر نشان می‌دهد. با توجه به این نمودار به سؤال‌های زیر پاسخ دهید:

الف) از سال ۷۵ تا ۹۱، در چه فاصله‌های زمانی، میزان بارندگی در شهر گرگان روند صعودی داشته است؟

ب) از سال ۹۱ تا ۹۴، در چه فاصله‌های زمانی، میزان بارندگی در شهر ارومیه روند نزولی داشته است؟

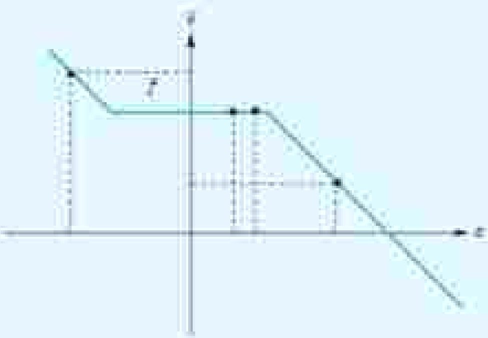
میزان بارندگی سالانه شهرهای گرگان، زاهدان و ارومیه (میلی‌متر)[1]

[1] منبع: سایت مرکز آمار ایران www.amar.org.ir



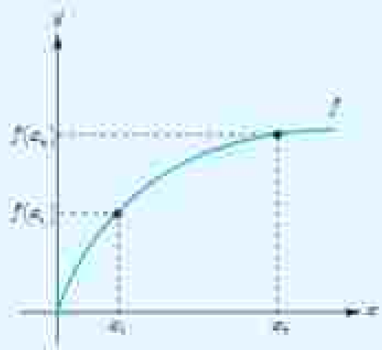
تابع صعودی

اگر برای هر دو نقطهٔ x_1 و x_2 از مجموعهٔ A ($A\subseteq D_f$) که $x_1<x_2$، داشته باشیم $f(x_1)\le f(x_2)$، آنگاه f را تابعی صعودی می‌نامیم.



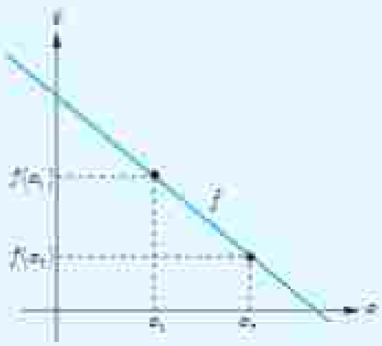
تابع نزولی

اگر برای هر دو نقطهٔ x_1 و x_2 از مجموعهٔ A ($A\subseteq D_f$) که $x_1<x_2$، داشته باشیم $f(x_1)\ge f(x_2)$، آنگاه f را تابعی نزولی می‌نامیم.



تابع اکیداً صعودی

اگر برای هر دو نقطهٔ x_1 و x_2 از مجموعهٔ A ($A\subseteq D_f$) که $x_1<x_2$، داشته باشیم $f(x_1)<f(x_2)$، آنگاه f را تابعی اکیداً صعودی می‌نامیم.



تابع اکیداً نزولی

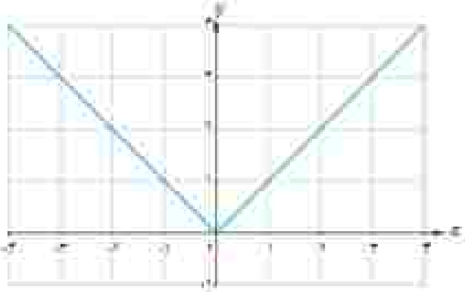
اگر برای هر دو نقطهٔ x_1 و x_2 از مجموعهٔ A ($A\subseteq D_f$) که $x_1<x_2$، داشته باشیم $f(x_1)>f(x_2)$، آنگاه f را تابعی اکیداً نزولی می‌نامیم.

تابع f را در یک بازه، ثابت می‌گوییم، اگر برای تمام مقادیر x در این بازه، مقدار f ثابت باشد. با توجه به تعاریف بالا، تابع ثابت در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی محسوب می‌شود.

نکته: به تابعی که اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد، تابع اکیداً یکنوا گوییم. همچنین به تابعی که صعودی یا نزولی باشد، تابع یکنوا گوییم. توابع اکیداً یکنوا همواره یکنوا هستند. آیا عکس این مطلب صحیح است؟ توضیح دهید.

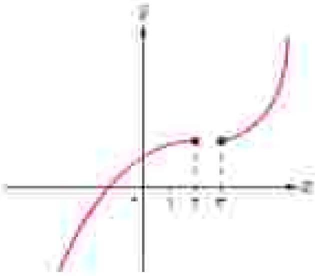
ممکن است تابعی در یک بازه صعودی (اکیداً صعودی) و در بازهٔ دیگر نزولی (اکیداً نزولی) باشد.

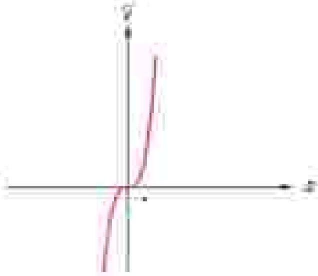
مثال: تابع $f(x)=|x|$ در بازهٔ $(-\infty,0]$ اکیداً نزولی و در بازهٔ $[0,+\infty)$ اکیداً صعودی است، اما در $\mathbb{R}$ نه صعودی است نه نزولی.

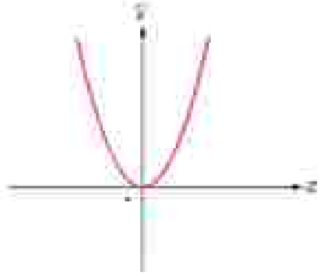


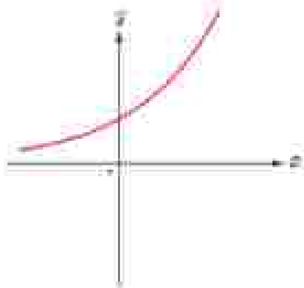
کار در کلاس

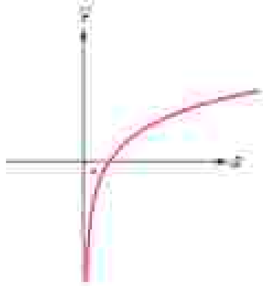
هر کدام از توابع زیر در چه بازه‌هایی اکیداً صعودی و در چه بازه‌هایی اکیداً نزولی هستند؟

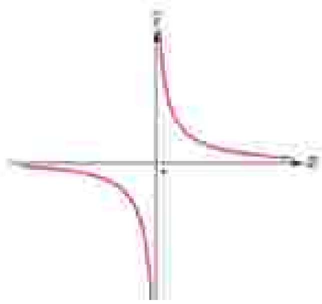

(الف)

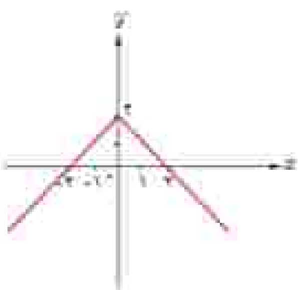

(ب)

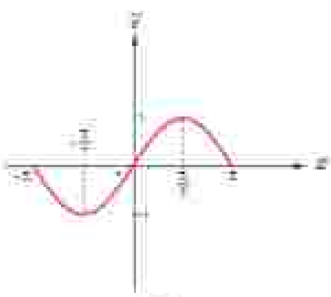

(پ)

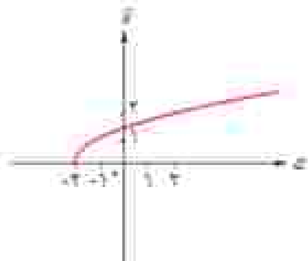

(ت)


(ث)


(ج)

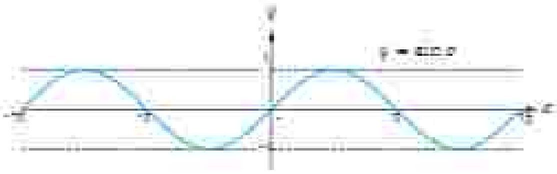

(چ)

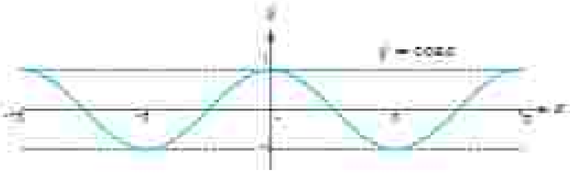

(ح)


(خ)

کار در کلاس

نمودار توابع $y=\sin x$ و $y=\cos x$ در بازهٔ $[-2\pi,2\pi]$ رسم شده است. صعودی یا نزولی بودن آنها را در بازه‌های مشخص شده تعیین نمایید.





x	$[-2\pi,-\frac{3\pi}{2}]$	$[-\frac{3\pi}{2},-\pi]$	$[-\pi,-\frac{\pi}{2}]$	$[-\frac{\pi}{2},0]$	$[0,\frac{\pi}{2}]$	$[\frac{\pi}{2},\pi]$	$[\pi,\frac{3\pi}{2}]$	$[\frac{3\pi}{2},2\pi]$
$y=\sin x$					صعودی			

x	$[-2\pi,-\frac{3\pi}{2}]$	$[-\frac{3\pi}{2},-\pi]$	$[-\pi,-\frac{\pi}{2}]$	$[-\frac{\pi}{2},0]$	$[0,\frac{\pi}{2}]$	$[\frac{\pi}{2},\pi]$	$[\pi,\frac{3\pi}{2}]$	$[\frac{3\pi}{2},2\pi]$
$y=\cos x$							صعودی	

کار در کلاس

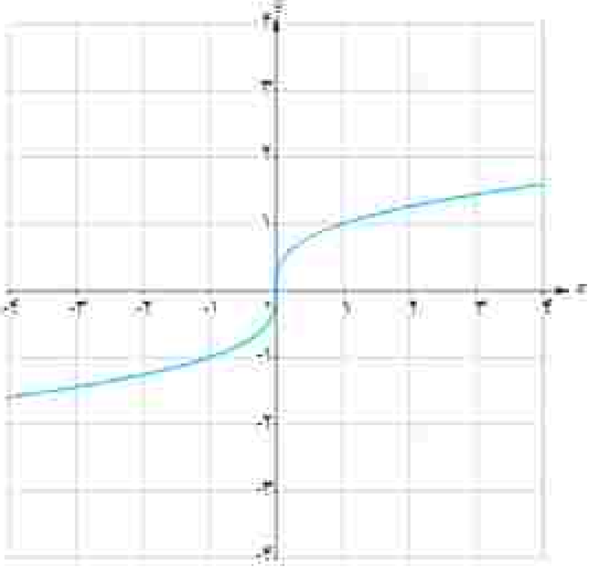
نمودار توابع زیر را رسم کنید و مشخص کنید در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی هستند.

الف) $f(x)=\cos(x-\frac{\pi}{2})$ $\quad D_f=[0,2\pi]$

ب) $g(x)=x+|x|$

پ) $t(x)=-x^2-1$

فعالیت



به نمودار تابع روبه‌رو دقت کنید.

الف) این تابع اکیداً صعودی است یا اکیداً نزولی؟

ب) این تابع یک به یک است؟

پ) آیا تابعی وجود دارد که اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد ولی یک به یک نباشد؟

تمرین

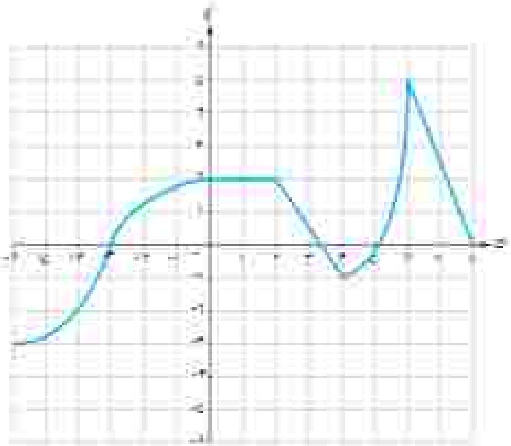
۱ نمودار توابع زیر را رسم کنید و دامنه و برد آنها را مشخص نمایید.

الف) $y=(x-1)^3-1$ ب) $y=(x+2)^3-2$

۲ نمودار تابع زیر را رسم کنید و بازه‌هایی را که در آنها تابع صعودی، نزولی یا ثابت است، مشخص کنید.

$$f(x)=\begin{cases}-2x-3 & x<-2\\ 3 & -2\leq x<2\\ 3x-2 & x\geq 2\end{cases}$$

۳ با استفاده از نمودار تابع زیر مشخص کنید این تابع در چه بازه‌هایی صعودی، نزولی یا ثابت است؟



۴ تابع نمایی $y=2^x-2$ و تابع لگاریتمی $y=-\log_2^x+2$ را رسم کنید و در مورد یکنوایی آنها در کلاس بحث کنید.

۵ تابع $y=x^2|x|$ در بازهٔ $(-\infty, a]$ نزولی است، حداکثر مقدار a چقدر است؟

۶ تابعی مثال بزنید که در دامنهٔ خود اکیداً صعودی و تابعی مثال بزنید که در دامنهٔ خود اکیداً نزولی باشد.

۷ نمودار تابعی را رسم کنید که در هر یک از بازه‌های $(-\infty,0)$ و $(0,+\infty)$ اکیداً صعودی باشد ولی در R اکیداً صعودی نباشد.

درس دوم

ترکیب توابع

در سال گذشته با اعمال جبری روی توابع آشنا شدیم، در این درس می‌خواهیم مفهوم ترکیب توابع را بررسی کنیم.

فعالیت

هنگامی که غذا از یخچال بیرون آورده می‌شود، دمای آن با گذشت زمان افزایش می‌یابد و مقدار این دما با استفاده از تابع $d(t)$ با ضابطهٔ زیر به‌دست می‌آید :

$d(t)=4t+2 \quad ; \quad 0\leq t\leq 3$ (واحد t، ساعت است.)

الف) هر کدام از مقادیر زیر را مانند نمونه به‌دست آورده و آنها را تفسیر کنید.

$d(2)=10$

دمای غذایی که دو ساعت از یخچال بیرون مانده است، برابر ۱۰ درجهٔ سانتی‌گراد است.

$d(1)=$ ....

$d(3)=$ ....

همچنین اگر یک مادهٔ غذایی را با دمای ۲ درجهٔ سانتی‌گراد از یخچال بیرون آوریم، میزان افزایش تعداد باکتری‌ها با بالا رفتن دما با استفاده از تابع $n(d)$ با ضابطهٔ زیر به دست می‌آید :

$n(d)=20d^2-80d+500 \quad ; \quad 2\leq d\leq 14$

که در این تابع، d دمای مادهٔ غذایی پس از خروج از یخچال برحسب درجهٔ سانتی‌گراد است.

ب) هر کدام از مقادیر زیر را مانند نمونه به‌دست آورده و آنها را تفسیر کنید.

$n(10)=20(10)^2-80(10)+500=1700$

یعنی تعداد باکتری‌های موجود در یک مادهٔ غذایی، پس از خروج از یخچال با رسیدن به دمای ۱۰ درجهٔ سانتی‌گراد به ۱۷۰۰ افزایش یافته است.

$n(2)=$ ....

$n(3)=$ ....

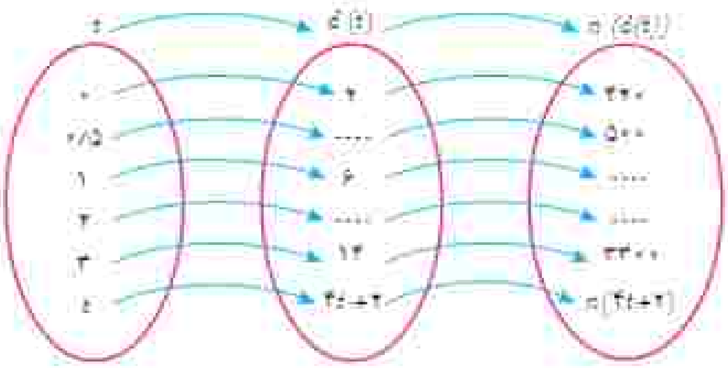
به‌طور کلی می‌توان گفت با استفاده از تابع d، با داشتن زمان، می‌توان دمای غذا و با استفاده از تابع n، با داشتن دمای غذا، می‌توان تعداد باکتری‌ها را به‌دست آورد، به عبارت دیگر :

زمان $\xrightarrow{d}$ دما $\xrightarrow{n}$ تعداد باکتری‌ها

از الف و ب می‌توان نتیجه گرفت : تعداد باکتری‌های موجود در یک مادهٔ غذایی که به میزان ۲ ساعت از یخچال بیرون مانده است، برابر ۱۷۰۰ تاست.

ب) جدول روبه‌رو را کامل کنید و به کمک آن نمودار را تکمیل نمایید.

t	$T(t)=۴t+۲$	$N(T(t))=N(۴t+۲)$
۰	$T(۰)=۲$	$N(T(۰))=N(۲)=۴۲۰$
۰/۵	$T(۰/۵)=\dots$	$N(T(۰/۵))=N(\dots)=۵۰۰$
۱	$T(۱)=۶$	$N(T(۱))=N(۶)=\dots$
۲	$T(۲)=\dots$	$N(T(۲))=N(\dots)=\dots$
۳	$T(۳)=۱۴$	$N(T(۳))=N(۱۴)=۳۳۰۰$



همان‌طور که دیدیم، می‌توان با دانستن زمان، دمای غذا را به‌دست آورد و با دانستن دما، تعداد باکتری‌ها قابل محاسبه است.

آیا به نظر شما می‌توان با دانستن زمان و بدون دانستن دما، تعداد باکتری‌ها را به‌دست آورد؟

به بیان دیگر آیا می‌توان تابعی ساخت که N را برحسب t مشخص کند؟

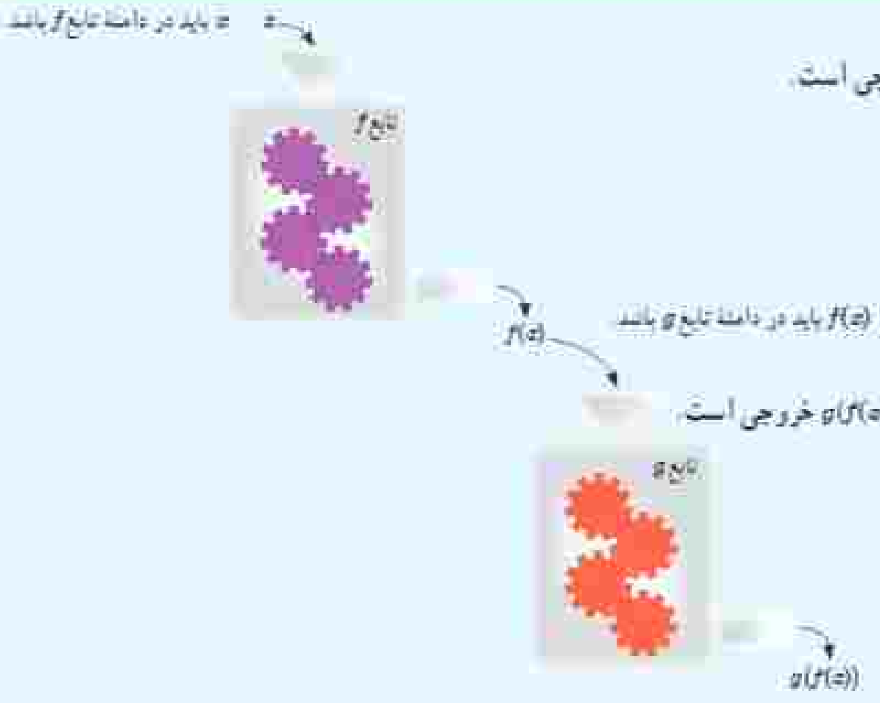
برای به‌دست آوردن چنین تابعی به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$N(T(t))=N(۴t+۲)=۲۰\cdot(۴t+۲)^۲-۸۰\cdot(۴t+۲)+۵۰۰=\dots\dots\dots=۳۲۰t^۲+۴۲۰ \qquad ۰\leq t\leq ۳$$

$N(T(t))$ تعداد باکتری‌های موجود در غذای یخچالی را نشان می‌دهد که به میزان t ساعت از یخچال بیرون مانده است.

مراحل ساخت تابع $g(f(x))$:

مرحلهٔ اول: x ورودی و $f(x)$ خروجی است.



مرحلهٔ دوم: $f(x)$ ورودی و $g(f(x))$ خروجی است.

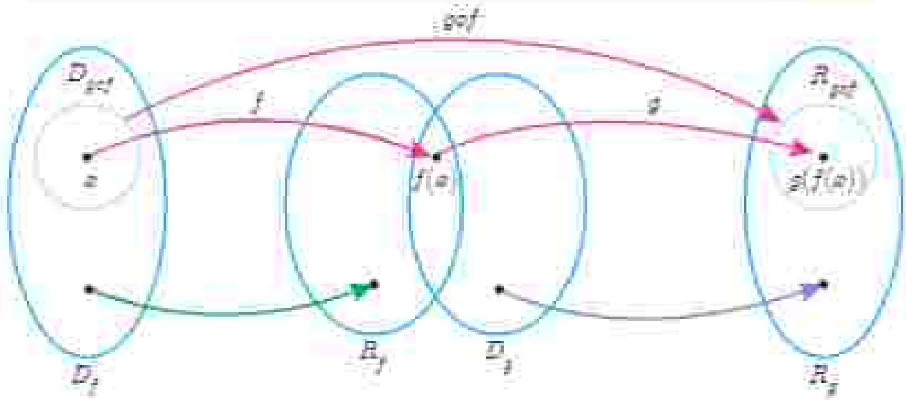
اگر f و g دو تابع باشند به‌طوری که برد تابع f و دامنهٔ تابع g اشتراک ناتهی داشته باشند، تابع $g(f(x))$ را با نماد $(gof)(x)$ نمایش می‌دهیم و تابع gof را تابع مرکب می‌نامیم، به عبارت دیگر: $(gof)(x)=g(f(x))$

دامنهٔ تابع مرکب:

دامنهٔ تابع مرکب gof مجموعهٔ xهایی است که هم‌زمان در دو شرط زیر صدق کنند:

۱ـ x در دامنهٔ f قرار داشته باشد.

۲ـ $f(x)$ در دامنهٔ g قرار داشته باشد.



بنابراین دامنهٔ تابع gof را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}$$

به‌صورت مشابه دامنهٔ تابع fog به صورت زیر است:

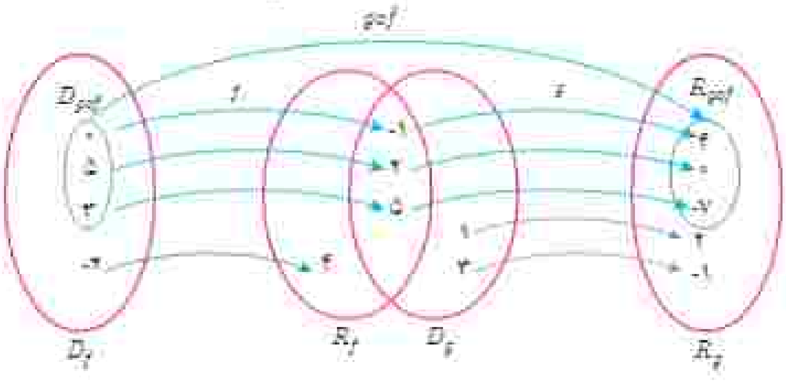
$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$$

و همچنین:

$$(fog)(x)=f(g(x))$$

مثال: اگر $g=\{(1,2),(3,-1),(2,0),(-1,4),(5,-7)\}$ و $f=\{(0,-1),(5,2),(3,5),(-2,4)\}$، تابع gof را در صورت امکان بنویسید.

$$\left.\begin{array}{l}(gof)(0)=g(f(0))=g(-1)=4\\(gof)(5)=g(f(5))=g(2)=0\\(gof)(3)=g(f(3))=g(5)=-7\\(gof)(-2)=g(f(-2))=g(4):\text{تعریف نشده}\end{array}\right\}\rightarrow gof=\{(0,4),(5,0),(3,-7)\}$$



کار در کلاس

با توجه به جدول‌های زیر، مقادیر خواسته شده را در صورت امکان بدست آورید.

x	$f(x)$
۳-	۷-
۲-	۵-
۱-	۳-
۰	۱-
۱	۳
۲	۵
۳	۵

x	$g(x)$
۳-	۸
۲-	۳
۱-	۰
۰	۱-
۱	۰
۲	۳
۳	۸

الف) $(fog)(1) =$ ....

ب) $(fog)(-1) =$ ....

پ) $(gof)(0) =$ ....

ت) $(gog)(-2) =$ ....

ث) $(gof)(2) =$ ....

ج) $(fof)(1) =$ ....

مثال: اگر $f(x) = x-2$ و $g(x) = x^2-1$، دامنه و ضابطهٔ تابع gof را بدست آورید.

$$D_f = \mathbb{R}\,,\ D_g = \mathbb{R}\,,\ D_{gof} = \left\{x \in D_f \,\middle|\, f(x) \in D_g\right\} = \{x \in \mathbb{R} \mid (x-2) \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

$$(gof)(x) = g(f(x)) = (f(x))^2 - 1 = (x-2)^2 - 1$$

مثال: اگر $f(x) = \sqrt{x-1}$ ، $g(x) = 2x^2 - 1$، دامنه و ضابطهٔ توابع fog و gof را بدست آورید.

$$D_f = [1, +\infty),\ D_g = \mathbb{R}$$

$$D_{gof} = \left\{x \in D_f \,\middle|\, f(x) \in D_g\right\} = \left\{x \in [1, +\infty) \,\middle|\, \sqrt{x-1} \in \mathbb{R}\right\} = [1, +\infty)$$

عبارت $\sqrt{x-1} \in \mathbb{R}$ به این معنی است که $\sqrt{x-1}$ در اعداد حقیقی با معنی باشد یعنی $x-1 \geq 0$ که بازهٔ $[1, +\infty)$ بدست می‌آید.

$$(gof)(x) = g(f(x)) = 2(f(x))^2 - 1 = 2(\sqrt{x-1})^2 - 1 = 2(x-1) - 1 = 2x - 3$$

$$D_{fog} = \left\{x \in D_g \,\middle|\, g(x) \in D_f\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, 2x^2 - 1 \in [1, +\infty)\right\}$$

عبارت $2x^2 - 1 \in [1, +\infty)$ به این معنی است که عبارت $2x^2-1$ متعلق به بازهٔ $[1, +\infty)$ باشد، یعنی $2x^2 - 1 \geq 1$، بنابراین:

$$D_{fog} = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, 2x^2 - 1 \geq 1\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^2 \geq 1\right\} = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

$$(fog)(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x) - 1} = \sqrt{2x^2 - 1 - 1} = \sqrt{2x^2 - 2}$$

اگر دامنه و ضابطهٔ توابع gof و fog را با هم مقایسه کنید چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

تذکر: دامنهٔ توابع مرکب را همیشه با توجه به تعاریف آن به دست می‌آوریم نه از روی ضابطهٔ آن. مثلاً در اینجا می‌بینیم که دامنهٔ تابع gof با توجه به ضابطهٔ آن $\mathbb{R}$ است در صورتی که برابر $[1, +\infty)$ است.

کار در کلاس

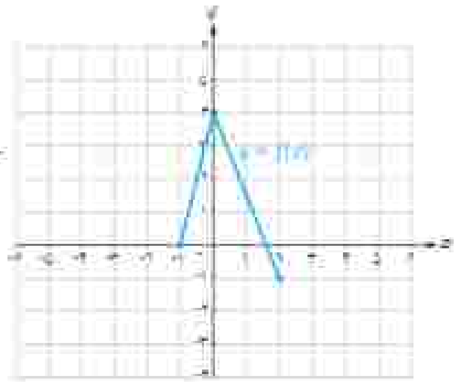
اگر $f(x) = \frac{2}{x-1}$ و $g(x) = \frac{3}{x}$، دامنه و ضابطهٔ توابع fog و fof را بدست آورید.

«تبدیل نمودار توابع»

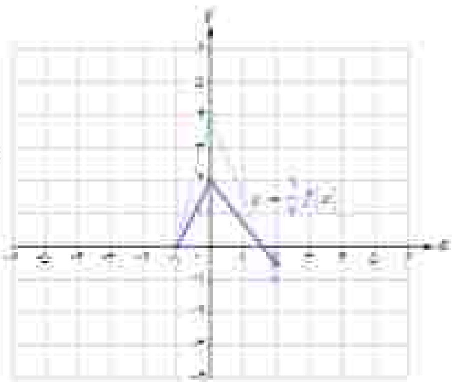
یادآوری: همان‌طور که در پایهٔ یازدهم دیدیم برای رسم نمودار تابع با ضابطهٔ $y=kf(x)$ کافی است عرض هر نقطه از نمودار تابع با ضابطهٔ $y=f(x)$ را با حفظ طول آن نقطه، k برابر کنیم.

مثال: در شکل زیر نمودار تابع f و با کمک آن نمودار توابع $y=\frac{1}{2}f(x)$ ، $y=-f(x)$ و $y=2f(x)$ رسم شده است.

x	$f(x)$
۱-	۰
۰	۴
۲	۲-



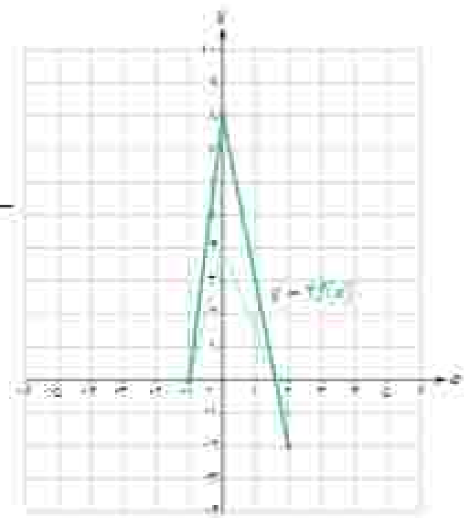
x	$\frac{1}{2}f(x)$
۱-	۰
۰	۲
۲	$-\frac{1}{2}$



برای رسم نمودار $y=\frac{1}{2}f(x)$ عرض هر نقطه نمودار تابع f را در $\frac{1}{2}$ ضرب می‌کنیم.

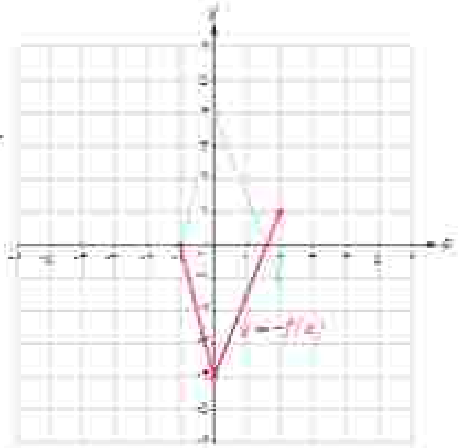
از آنجایی که ریشه‌های معادلهٔ $f(x)=0$ و $kf(x)=0$ یکسان است بنابراین محل تلاقی نمودار توابع f و kf با محور xها یکسان است.

x	$2f(x)$
۱-	۰
۰	۸
۲	۴-



برای رسم نمودار $y=2f(x)$ عرض هر نقطه نمودار تابع f را در ۲ ضرب می‌کنیم.

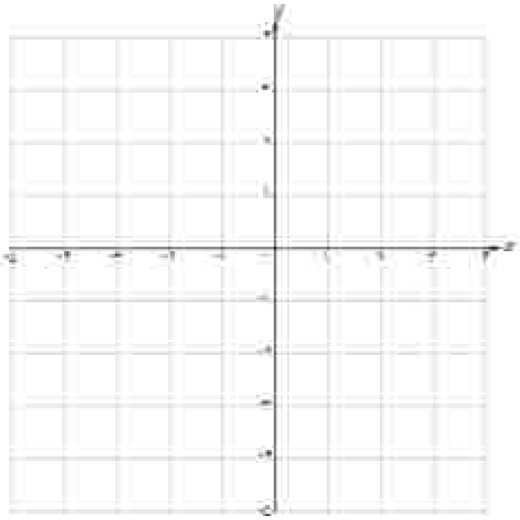
x	$-f(x)$
۱-	۰
۰	۴-
۲	۲



برای رسم نمودار $y=-f(x)$ عرض هر نقطه نمودار تابع f را در ۱- ضرب می‌کنیم.

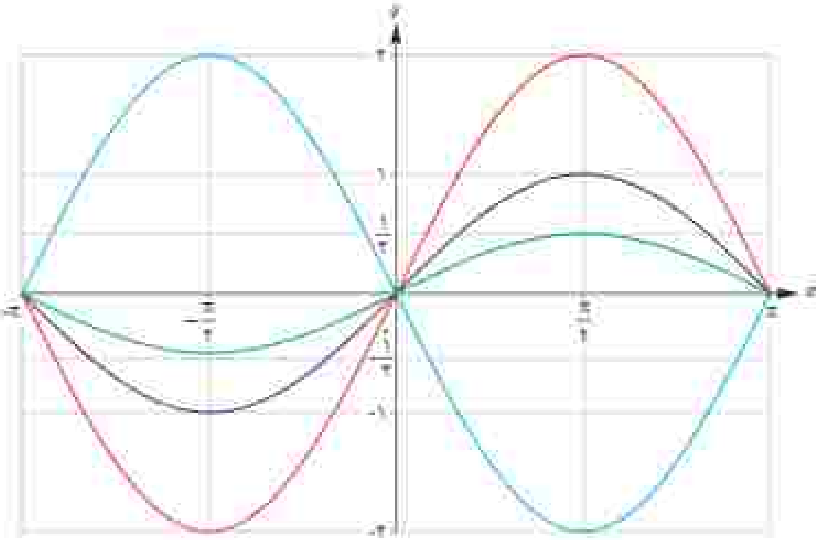
دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $y=kf(x)$ همان دامنهٔ تابع $y=f(x)$ است، اما برد آنها لزوماً یکسان نیست.

کار در کلاس



نمودار تابع $f(x)=|x-2|$ را در بازهٔ $[-2,3]$ رسم کنید و به کمک آن نمودار توابع $g(x)=-|x-2|$ و $h(x)=\frac{1}{2}|x-2|$ و $k(x)=-\frac{1}{3}|2-x|$ را رسم کنید.

کار در کلاس



در شکل روبه‌رو نمودار توابع با ضابطه‌های $y=\sin x$ ، $y=2\sin x$ ، $y=-2\sin x$ و $y=\frac{1}{2}\sin x$ در بازهٔ $[-\pi,\pi]$ رسم شده است. نمودار تابع $y=\sin x$ را مشخص کرده و توضیح دهید نمودار توابع دیگر چگونه به کمک آن رسم شده است. دامنه و برد هر کدام را مشخص کرده و با هم مقایسه کنید.

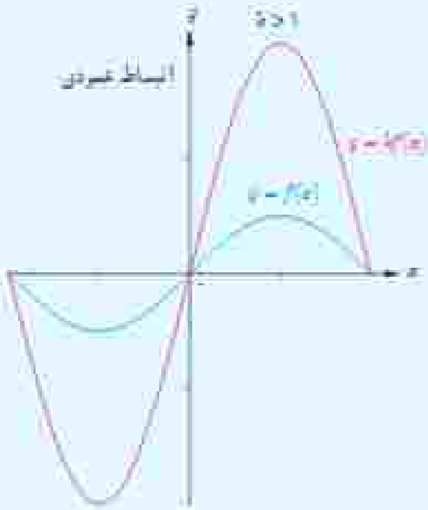
ییلاقات تالش

می‌توان گفت نمودار تابع $y = kf(x)$ تغییرات زیر را نسبت به نمودار $y = f(x)$ دارد :

اگر $k > 0$، نمودار $y = kf(x)$ را می‌توان با انبساط یا انقباض نمودار $y = f(x)$ در امتداد محور yها به دست آورد.

اگر $k < 0$ ابتدا نمودار f نسبت به محور xها قرینه می‌شود، سپس با ضریب $|k|$ به طور عمودی منبسط یا منقبض می‌شود.

اگر $0 < k < 1$ نمودار $f(x)$ در امتداد محور yها با ضریب k فشرده می‌شود که در این حالت می‌گوییم نمودار انقباض عمودی یافته است.

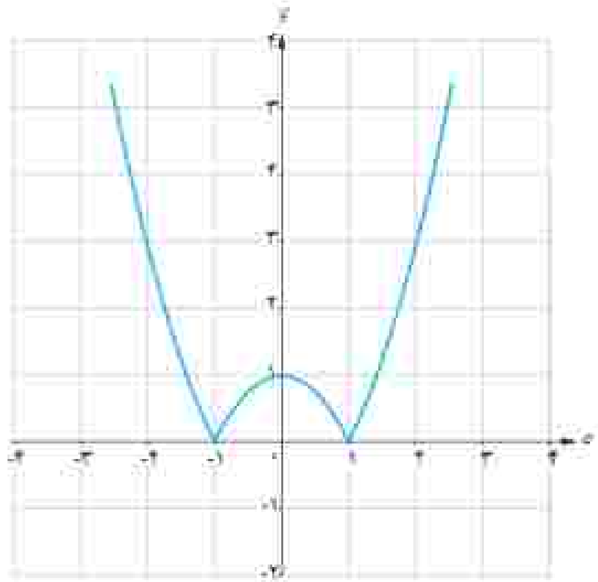


اگر $k > 1$، نمودار $f(x)$ در امتداد محور yها با ضریب k کشیده می‌شود که در این حالت می‌گوییم نمودار انبساط عمودی یافته است.

رسم نمودار $|f|$:

برای رسم نمودار $y = |f(x)|$ کافی است نمودار $y = f(x)$ را رسم کنیم و در قسمت‌هایی که نمودار f زیر محور xهاست، قرینهٔ نمودار f را نسبت به محور xها رسم کنیم.

مثال : در شکل روبه‌رو نمودار تابع $y = |x^2 - 1|$ رسم شده است.



رسم نمودار $f(hx)$ با استفاده از نمودار $f(x)$:

مثال : تابع $f(x)=x+3$ را با دامنهٔ $[-4,0]$ در نظر می‌گیریم و چگونگی رسم نمودار توابع $y=f(2x)$ و $y=f(\frac{x}{2})$ را بررسی می‌کنیم.
ضابطهٔ تابع $y=f(2x)$ به صورت $f(2x)=2x+3$ است و دامنهٔ آن به شکل زیر مشخص می‌شود :

$$-4\leq 2x\leq 0 \rightarrow -2\leq x\leq 0 \rightarrow f(2x) \text{ دامنهٔ } : D=[-2,0]$$

همچنین ضابطهٔ تابع $y=f(\frac{x}{2})$ به صورت $f(\frac{x}{2})=\frac{x}{2}+3$ است و دامنهٔ آن به شکل زیر مشخص می‌شود :

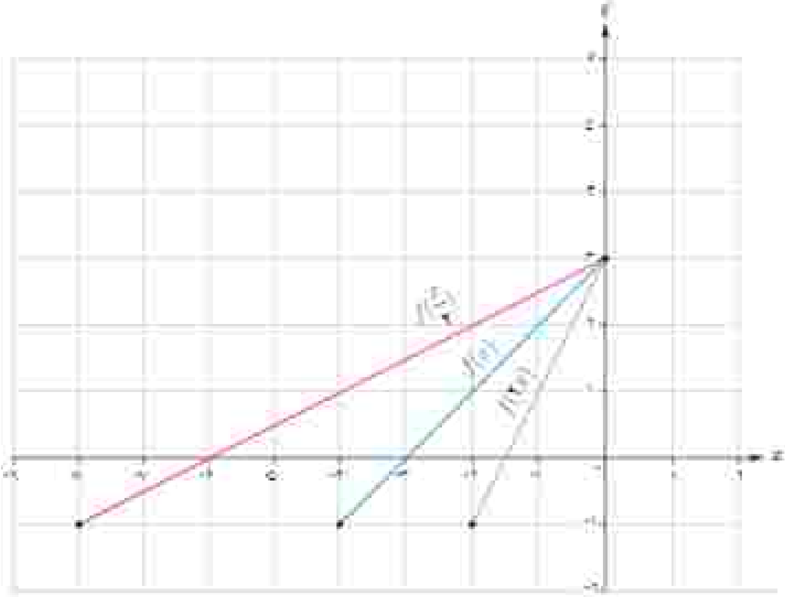
$$-4\leq \frac{x}{2}\leq 0 \rightarrow -8\leq x\leq 0 \rightarrow f(\frac{x}{2}) \text{ دامنهٔ } : D=[-8,0]$$

برخی از نقاط نمودار این سه تابع در جدول‌های زیر نوشته شده است :

x	-4	-3	-2	-1	0
$f(x)=x+3$	-1	0	1	2	3

x	-2	$-1/5$	-1	$-0/5$	0
$f(2x)=2x+3$	-1	0	1	2	3

x	-8	-6	-4	-2	0
$f(\frac{x}{2})=\frac{x}{2}+3$	-1	0	1	2	3

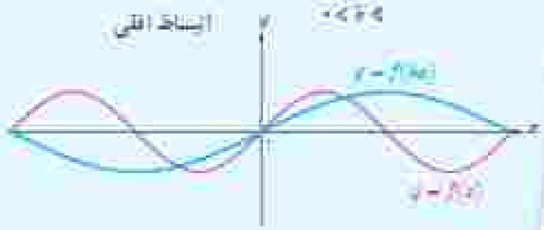


همان‌طور که ملاحظه می‌شود برد توابع $f(2x)$ و $f(\frac{x}{2})$ با برد تابع $f(x)$ یکسان است.

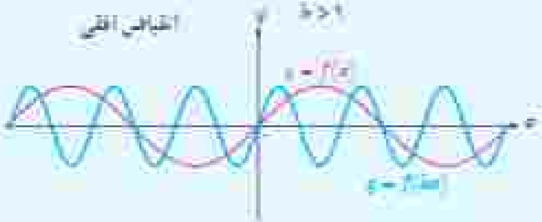
برای رسم نمودار تابع $y=f(kx)$، کافی است طول نقاط نمودار تابع $y=f(x)$ را در $\frac{1}{k}$ ضرب کنیم.

اگر $k>0$، نمودار $y=f(kx)$ را می‌توان با انبساط یا انقباض نمودار $y=f(x)$ در امتداد محور xها به دست آورد.

اگر $k<0$، ابتدا نمودار f نسبت به محور yها قرینه می‌شود، سپس با ضریب $\left|\frac{1}{k}\right|$ به‌طور افقی منبسط یا منقبض می‌شود.

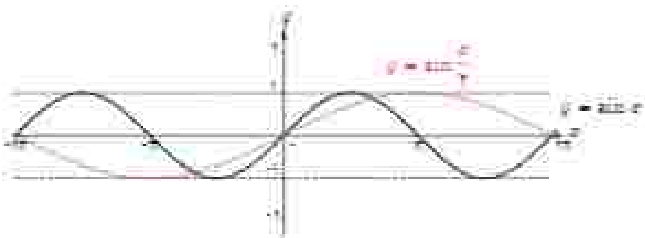


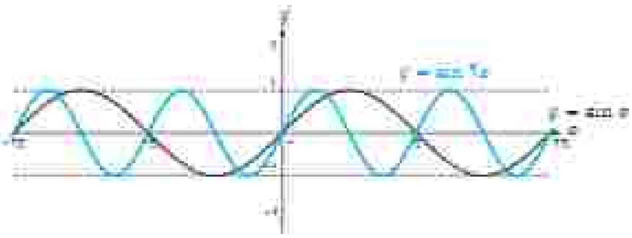
اگر $0<k<1$، نمودار $f(x)$ در امتداد محور xها با ضریب $\frac{1}{k}$ کشیده می‌شود که در این حالت می‌گوییم نمودار انبساط افقی یافته است.



اگر $k>1$ نمودار $f(x)$ در امتداد محور xها با ضریب $\frac{1}{k}$ فشرده می‌شود که در این حالت می‌گوییم نمودار انقباض افقی یافته است.

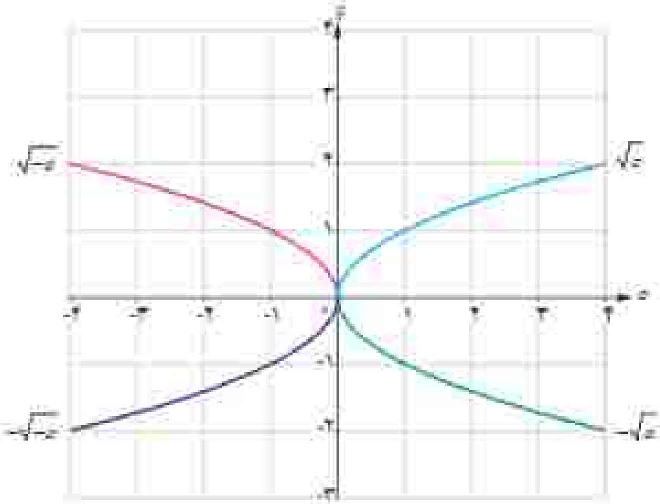
مثال : در شکل‌های زیر نمودار توابع $y=\sin x$ و $y=\sin 2x$ و $y=\sin\frac{x}{2}$ در بازهٔ $[-2\pi, 2\pi]$ رسم شده‌اند. همان‌طور که می‌بینیم نمودار تابع $y=\sin 2x$ با انقباض نمودار تابع $y=\sin x$ در امتداد محور xها و نمودار تابع $y=\sin\frac{x}{2}$ با انبساط نمودار تابع $y=\sin x$ در امتداد محور xها به‌دست آمده است.





کار در کلاس

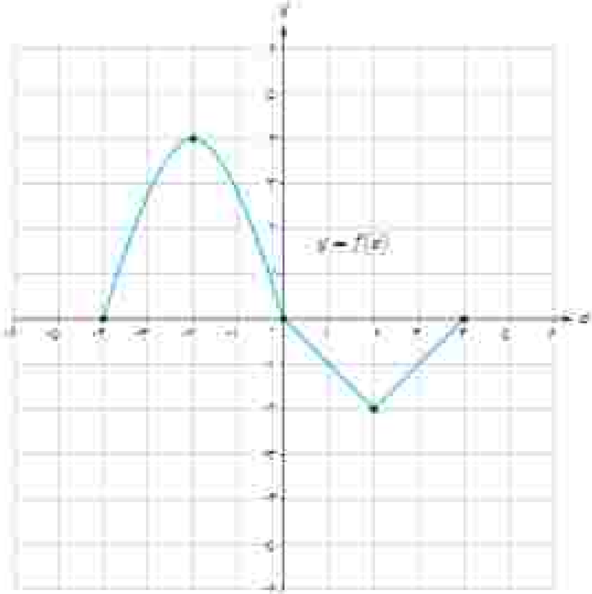
نمودار توابع $y=\sqrt{-x}$ و $y=-\sqrt{x}$ و $y=-\sqrt{-x}$ به کمک نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ رسم شده است. دامنه و برد توابع فوق را مشخص کنید.



کار در کلاس

نمودار تابع f با دامنهٔ $[-4,4]$ به‌صورت زیر داده شده است، می‌خواهیم با استفاده از آن نمودار توابع $y=f(2x)$ و $y=f(\frac{1}{2}x)$ را رسم کنیم.

x	$f(x)$
-4	0
-2	4
0	0
2	-2
4	0

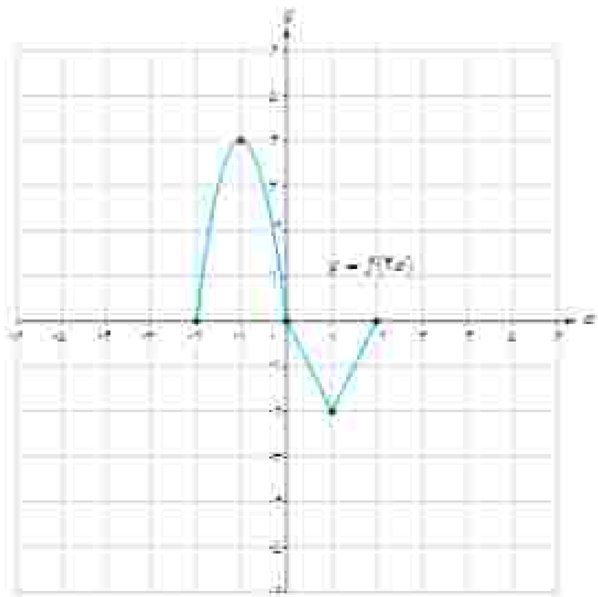


الف) برای تعیین دامنهٔ $y=f(2x)$ به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$-4 \le 2x \le 4 \rightarrow -2 \le x \le 2$$

بنابراین دامنهٔ تابع $y=f(2x)$ بازهٔ $[-2,2]$ است. جدول نقاط را کامل کنید.
برای رسم نمودار $f(2x)$، طول نقاط با همان xها باید محاسبه شود.

x	$2x$	$f(2x)$	$(x, f(2x))$
-2	-4	0	$(-2,0)$
...	-2	4	$(...,4)$
...	0	0	$(...,0)$
...	2	-2	$(...,-2)$
...	4	0	$(...,0)$

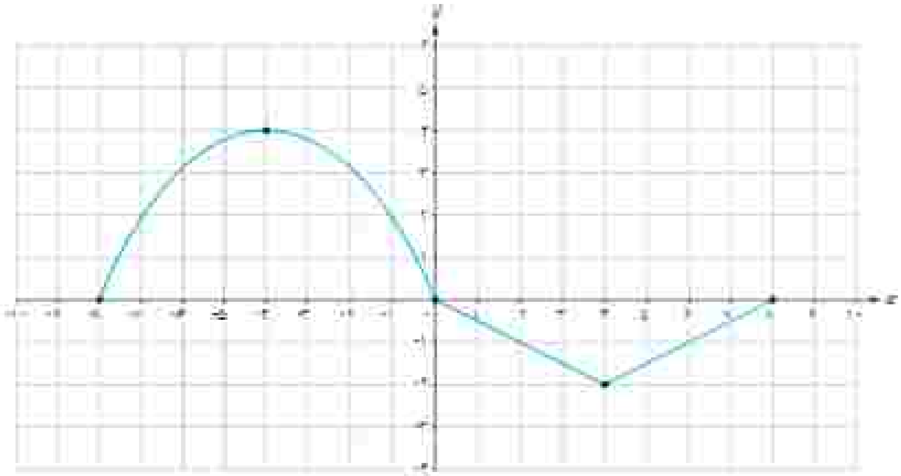


ب) برای تعیین دامنهٔ $y = f(\frac{1}{2}x)$ به صورت زیر عمل می‌کنیم.

$$-4 \le \frac{1}{2}x \le 4 \rightarrow -8 \le x \le 8$$

پس دامنهٔ تابع $y=f(\frac{1}{2}x)$ بازهٔ $[-8,8]$ است و نقاط متناظر به‌صورت زیر است:

x	$f(\frac{1}{2}x)$
-8	0
-4	4
0	0
4	-2
8	0



همان‌طور که ملاحظه شد برای رسم نمودار $y=f(2x)$ طول هر نقطهٔ نمودار $y=f(x)$ را در $\frac{1}{2}$ و برای رسم نمودار $y=f(\frac{1}{2}x)$ طول هر نقطه را در ۲ ضرب می‌کنیم.

دامنهٔ تابع $y=f(kx)$ با دامنهٔ تابع $y=f(x)$ الزاماً یکسان نیست ولی برد تابع $y=f(kx)$ همان برد تابع $y=f(x)$ است.

خواندنی

فرش‌بافی از جمله هنرهای اصیل و ارزشمندی است که سابقه‌ای طولانی در ایران دارد. این هنر اصیل با فرهنگ کهن این مرز و بوم پیوندی ناگسستنی داشته و در گذر قرن‌ها یکی از دستاوردهای مهم ایرانیان محسوب شده است، به طوری که جهانیان فرش را با نام ایران می‌شناسند. هنرمندان طراح فرش با الهام از طبیعت و یا ترکیبی از خیال و طبیعت نقش‌هایی را بر روی آثارشان جلوه‌گر می‌سازند که در آنها اشکالی به صورت شکسته، گردان و یا تلفیقی طراحی می‌کنند. در این طراحی‌ها از انتقال و تبدیل نیز استفاده می‌شود.

تمرین

۱) اگر $f=\{(7,8),(5,3),(9,8),(11,4)\}$ و $g=\{(5,7),(3,5),(7,9),(9,11)\}$، توابع fog و gof را به‌دست آورید.

۲) در هر قسمت موارد خواسته شده را در صورت امکان به‌دست آورید.

الف) $f(x)=x^2-5 \quad ; g(x)=\sqrt{x+6} \quad : D_{fog}, (fog)(x)$

ب) $f(x)=\sqrt{3-2x} \quad ; g(x)=\dfrac{6}{3x-5} \quad : D_{fog}, (fog)(x)$

پ) $f(x)=\sqrt{x+2} \quad ; g(x)=\sqrt{x^2-16} \quad : D_{gof}, (gof)(x)$

ت) $f(x)=\sin x \quad ; g(x)=\sqrt{x} \quad : D_{gof}, (gof)(x)$

۳) اگر $f(g(x))=3x^2-6x+12$ و $f(x)=3x-4$، ضابطهٔ تابع $g(x)$ را به‌دست آورید.

۴) مشخص کنید کدام یک از جملات زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟

الف) اگر $f(x)=x^2-4$ و $g(x)=\sqrt{x^2-4}$، آنگاه $(fog)(5)=-25$.

ب) برای دو تابع f و g که $g\neq f$ تساوی $(fog)(x)=(gof)(x)$ هیچ وقت برقرار نیست.

پ) اگر $f(7)=5$ و $g(4)=7$، آنگاه $(fog)(4)=5$.

ت) اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=2x-1$، آنگاه $(fog)(5)=g(2)$.

۵) الناز می‌خواهد از فروشگاه بهار یک لپ‌تاپ با قیمت بیش از دو میلیون تومان خریداری نماید. این فروشگاه در ماه رمضان مسابقه‌ای برگزار کرده و به برندگان کارت تخفیف ۲۰ درصدی داده است و الناز نیز در این مسابقه برنده شده است. همچنین این فروشگاه روزهای پنج‌شنبه به مشتریان خود در خریدهای بیش از یک و نیم میلیون تومان، ۲۰۰ هزار تومان تخفیف نقدی می‌دهد. با استفاده از تابع مرکب نشان دهید کدام‌یک از حالت‌های الف یا ب به نفع الناز است؟

الف) اول کارت تخفیف ۲۰ درصدی و بعد تخفیف نقدی را استفاده کند.

ب) اول تخفیف نقدی را استفاده کند و بعد کارت تخفیف را ارائه دهد.

۶) تابع $h(x)=(3x^2-4x+1)^5$ ترکیب کدام دو تابع زیر است؟

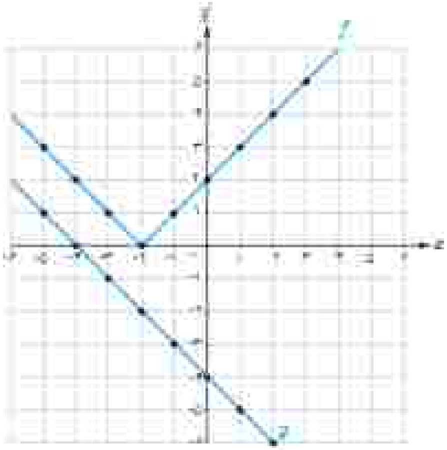
الف) $f(x)=\sqrt[5]{x} \quad ; g(x)=3x^2-4x+1$

ب) $k(x)=x^5 \quad ; l(x)=3x^2-4x+1$

۷) هریک از توابع زیر را به‌صورت ترکیب دو تابع بنویسید. آیا جواب منحصر به فرد است؟

الف) $h(x)=\sqrt[3]{x^2+1}$

ب) $l(x)=\sqrt{x^2+5}$



۸ با توجه به نمودارهای توابع f و g، مقادیر زیر را در صورت وجود بیابید.

الف) $(fog)(-1)$

ب) $(gof)(0)$

پ) $(fog)(1)$

ت) $(gof)(-1)$

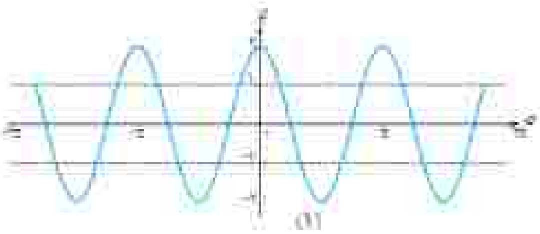
۹ با توجه به ضابطه‌های توابع f و g، معادلات مورد نظر را تشکیل داده و آنها را حل کنید.

الف) $f(x)=2x-5 \quad , \quad g(x)=x^2-3x+8 \; : (fog)(x)=7$

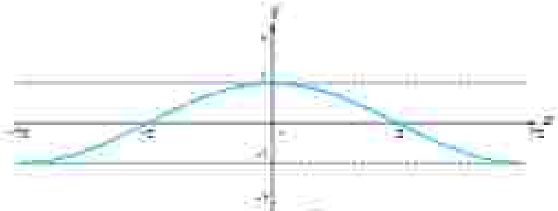
ب) $f(x)=3x^2+x-1 \quad , \quad g(x)=1-2x \quad : (gof)(x)=-5$

۱۰ با استفاده از نمودار $y=\cos x$، نمودار توابع زیر رسم شده است، ضابطه هر نمودار را مشخص کنید.

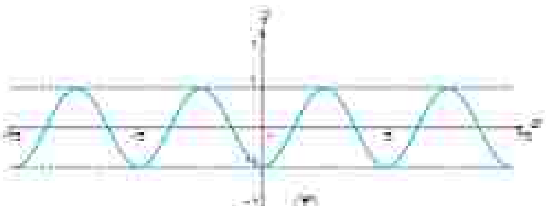
الف) $y=-\frac{1}{2}\cos(-\frac{1}{2}x)$ ب) $y=2\cos 2x$ پ) $y=\cos(\frac{1}{2}x)$ ت) $y=-\cos 2x$



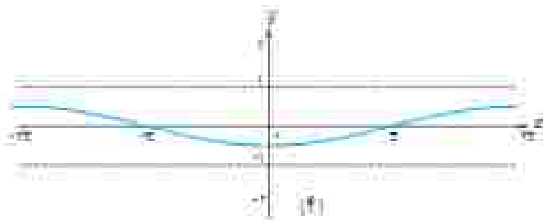
(۱)



(۲)



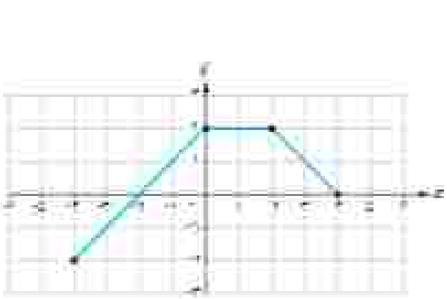
(۳)



(۴)

۱۱ نمودار توابع $y=-\sin 2x-1$ و $y=2\sin(\frac{-1}{3}x)$ را به کمک نمودار تابع $y=\sin x$ در بازهٔ $[-\pi, \pi]$ رسم کنید.

۱۲ با استفاده از نمودار تابع f، نمودارهای خواسته شده را رسم کنید.



الف) $y=\frac{1}{2}f(2x)-1$

ب) $y=-f(-x)+2$

پ) $y=2f(x-1)-3$

ت) $y=2f(\frac{1}{2}x)$

درس سوم

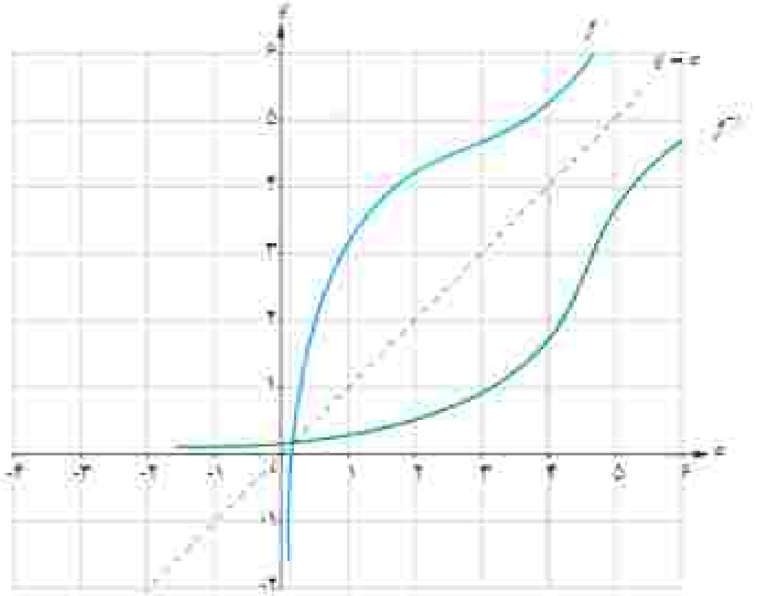
تابع وارون

یادآوری

همان‌طور که در فصل تابع کتاب ریاضی ۲ دیدیم با جابه‌جا کردن مؤلفه‌های زوج‌های مرتب تابع یک‌به‌یک f، تابعی جدید به‌دست می‌آید که وارون تابع f است و آن را با f^{-1} نشان می‌دهیم. یعنی اگر نقطهٔ $(b\,,a)$ روی نمودار تابع f قرار داشته باشد آن‌گاه نقطهٔ $(a\,,b)$ روی نمودار تابع f^{-1} قرار دارد و به عکس:

$$(a\,,b) \in f \Leftrightarrow (b\,,a) \in f^{-1}$$

همچنین دیدیم نمودار تابع f و تابع وارون آن نسبت به خط $x = y$ (نیمساز ربع اول و سوم) قرینه‌اند.



مثال:

اگر $f = \{(۱,۴),(۲,۳),(۳,۵)\}$ آن‌گاه:

$$f^{-1} = \{(۴,۱),(۳,۲),(۵,۳)\}$$

خواهیم داشت:

$$\begin{cases} (fof^{-1})(۴) = f(f^{-1}(۴)) = f(۱) = ۴ \\ (fof^{-1})(۳) = f(f^{-1}(۳)) = f(۲) = ۳ \rightarrow fof^{-1} = \{(۴,۴),(۳,۳),(۵,۵)\} \\ (fof^{-1})(۵) = f(f^{-1}(۵)) = f(۳) = ۵ \end{cases}$$

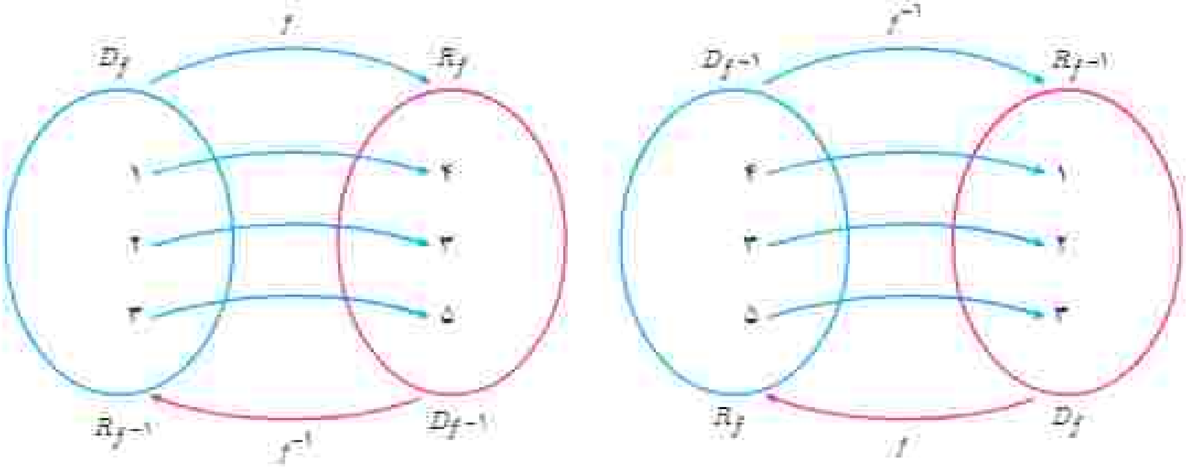
بنابراین به ازای هر x متعلق به دامنهٔ تابع f^{-1} داریم:

$$(fof^{-1})(x) = x$$

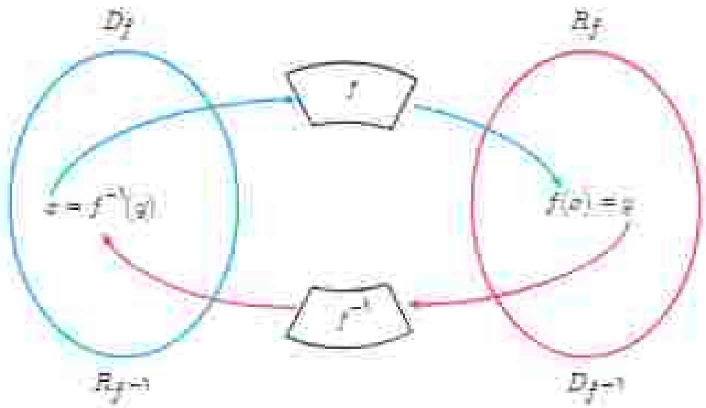
همچنین:

$$\begin{cases}(f^{-1}of)(۱)=f^{-1}(f(۱))=f^{-1}(۴)=۱\\(f^{-1}of)(۲)=f^{-1}(f(۲))=f^{-1}(۳)=۲\\(f^{-1}of)(۳)=f^{-1}(f(۳))=f^{-1}(۵)=۳\end{cases}\rightarrow f^{-1}of=\{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳)\}$$

بنابراین به ازای هر x متعلق به دامنهٔ تابع f داریم: $(f^{-1}of)(x)=x$



به‌طور کلی اگر f تابعی یک‌به‌یک و f^{-1} تابع وارون آن باشد، نمودار زیر ارتباط f و f^{-1} را نشان می‌دهد.



اگر f تابعی وارون‌پذیر و f^{-1} وارون آن باشد، همواره داریم:

$$f(f^{-1}(x))=x \quad ; \quad x\in D_{f^{-1}}$$

$$f^{-1}(f(x))=x \quad ; \quad x\in D_f$$

با توجه به آنچه که دیدیم می‌توان گفت اگر دو تابع f و g به گونه‌ای باشند که:

الف) $(fog)(x)=x \; ; \; x\in D_g$

ب) $(gof)(x)=x \; ; \; x\in D_f$

آنگاه توابع f و g وارون یکدیگرند.

مثال : نشان دهید توابع f و g وارون یکدیگرند.

$$f(x) = ۳x - ۴$$

$$g(x) = \frac{x + ۴}{۳}$$

باید ثابت کنیم ترکیب دو تابع f و g برابر تابع همانی است، یعنی :

$$(fog)(x) = f(g(x)) = ۳g(x) - ۴ = ۳(\frac{x + ۴}{۳}) - ۴ = x \qquad (x \in D_g)$$

همچنین :

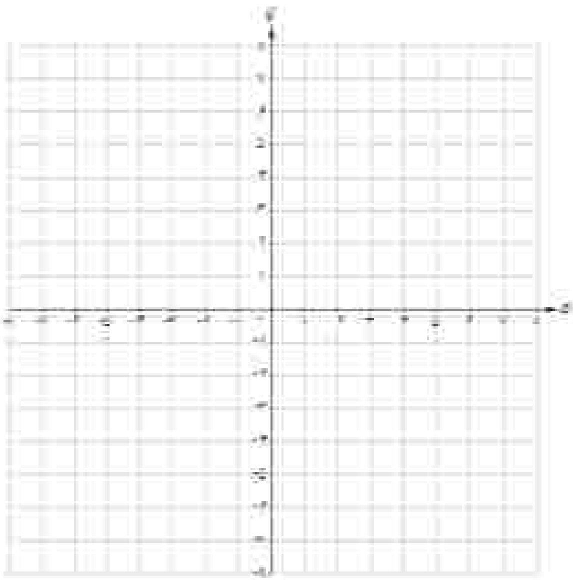
$$(gof)(x) = g(f(x)) = \frac{f(x) + ۴}{۳} = \frac{۳x - ۴ + ۴}{۳} = x \qquad (x \in D_f)$$

بنابراین دو تابع f و g وارون یکدیگرند.

برای بهدست آوردن ضابطهٔ تابع وارون یک تابع یک‌به‌یک مانند f، در معادلهٔ $y = f(x)$ در صورت امکان x را برحسب y محاسبه می‌کنیم، سپس با تبدیل y به x، $f^{-1}(x)$ را بهدست می‌آوریم.[1]

کار در کلاس

آیا تابع $f(x) = x^۳$ یک به یک است؟ چرا؟ در دستگاه مختصات زیر نمودار تابع $f(x) = x^۳$ و وارون آن را رسم کنید. ضابطهٔ تابع وارون چیست؟



۱ـ توابع مورد نظر در این درس توابع خطی، درجه دو، $\sqrt{ax+b}$ و $\sqrt[3]{x}$ است. رعایت این موضوع در ارزشیابی‌ها الزامی است.

مثال : اگر $f(x)=\sqrt{x+3}$، دامنه و برد توابع f و f^{-1} را به‌دست آورده و نمودار آنها را رسم کنید. ضابطهٔ f^{-1} را نیز به‌دست آورید.
تابع f یک‌به‌یک است، بنابراین دارای وارون است.

$$\begin{cases} D_f=[-3,+\infty) \\ R_f=[0,+\infty) \end{cases} \qquad \begin{cases} D_{f^{-1}}=[0,+\infty) \\ R_{f^{-1}}=[-3,+\infty) \end{cases}$$

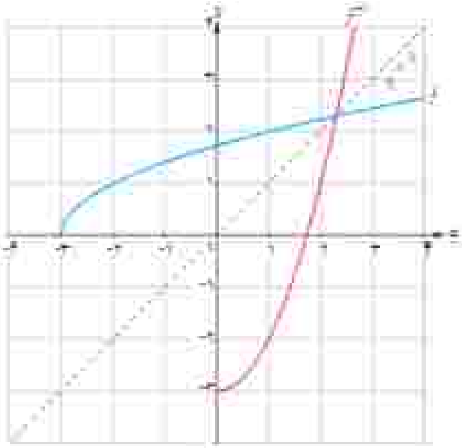
$y=\sqrt{x+3}$

$y^2=x+3$

$x=y^2-3$

$f^{-1}(y)=y^2-3$

$f^{-1}(x)=x^2-3$



کار در کلاس

ضابطهٔ تابع وارون توابع زیر را در صورت وجود به‌دست آورید. دامنه و برد هر تابع و وارون آن را با استفاده از نمودار مشخص کنید.

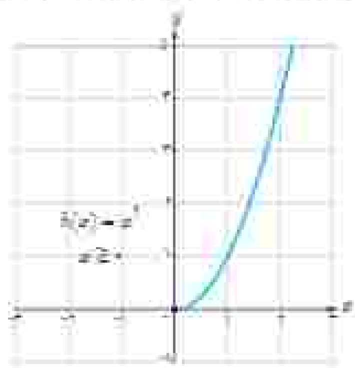
الف) $f(x)=-\frac{1}{2}x+3$

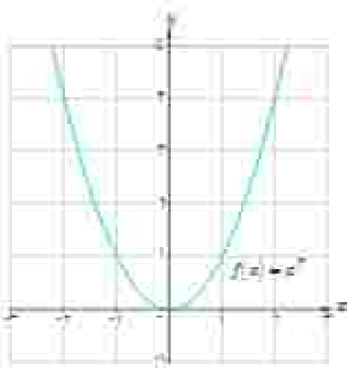
ب) $g(x)=1+\sqrt{x-2}$

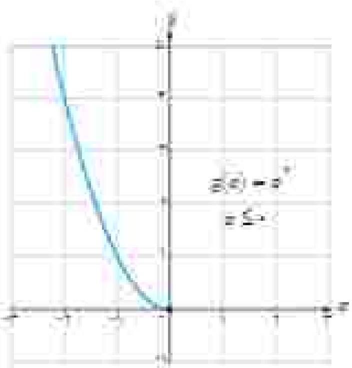
پ) $h(x)=x^2+1$

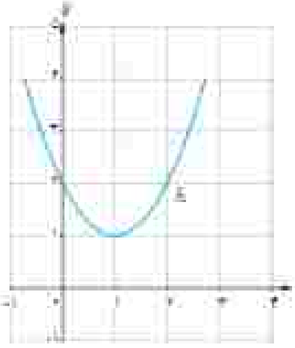
محدود کردن دامنهٔ تابع

از سال قبل می‌دانیم که اگر تابعی یک‌به‌یک نباشد وارون‌پذیر هم نیست. اما گاهی با محدود کردن دامنهٔ یک تابع، می‌توان تابعی یک‌به‌یک به‌دست آورد. به‌طور مثال تابع $f(x)=x^2$ یک‌به‌یک نیست ولی با محدود کردن دامنهٔ تابع به بازهٔ $[0,+\infty)$ و یا $(-\infty,0]$ یا زیرمجموعه‌هایی از این دو بازه، تابعی یک‌به‌یک به‌دست می‌آید.









مثال : نمودار تابع $h(x)=x^2-2x+2$ نشان می‌دهد که این تابع یک‌به‌یک نیست. اما می‌توان با محدود کردن دامنهٔ این تابع آن را طوری محدود کرد که تابعی یک‌به‌یک بدست آید و سپس وارون آن را محاسبه کرد.

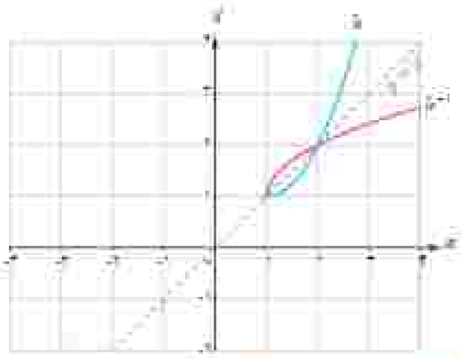
$h(x)=x^2-2x+2=(x-1)^2+1$

مثلاً دامنهٔ تابع h را به بازهٔ $[1,+\infty)$ محدود می‌کنیم. ضابطهٔ تابع جدید که آن را $h(x)$ می‌نامیم با ضابطهٔ $h(x)$ برابر است اما دامنهٔ تابع h مجموعهٔ اعداد حقیقی و دامنهٔ تابع h بازهٔ $[1,+\infty)$ است.

در تابع h، x را برحسب y بدست می‌آوریم :

$$h(x)=(x-1)^2+1$$
$$y=(x-1)^2+1$$
$$(x-1)^2=y-1$$
$$x-1=\pm\sqrt{y-1}$$
$$x=\pm\sqrt{y-1}+1$$
$$h^{-1}(x)=\sqrt{x-1}+1$$

جواب منفی غیرقابل قبول است. (چرا؟)



نمودار توابع h و h^{-1} به‌صورت روبه‌رو است :

آیا به جز بازهٔ $[1,+\infty)$، بازهٔ دیگری می‌توان یافت که تابع h در آن یک به یک باشد؟

باغ ارم شیراز

تمرین

۱ ضابطهٔ تابع وارون توابع یک‌به‌یک زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(x) = \dfrac{-8x+3}{2}$

ب) $g(x) = -5 - \sqrt{3x+1}$

۲ در مورد هر یک از قسمت‌های زیر نشان دهید که f و g وارون یکدیگرند.

الف) $f(x) = \dfrac{-7}{2}x - 3 \quad , \quad g(x) = -\dfrac{2x+6}{7}$

ب) $f(x) = -\sqrt{x-8} \quad , \quad g(x) = 8 + x^2 \ ; \ x \leq 0$

۳ رابطهٔ بین درجهٔ سانتی‌گراد و فارنهایت که برای اندازه‌گیری دما استفاده می‌شود به‌صورت $f(x) = \dfrac{9}{5}x + 32$ است که در آن x میزان درجهٔ سانتی‌گراد و $f(x)$ میزان درجهٔ فارنهایت است. $f^{-1}(x)$ را به دست آورده و توضیح دهید چه چیزی را نشان می‌دهد.

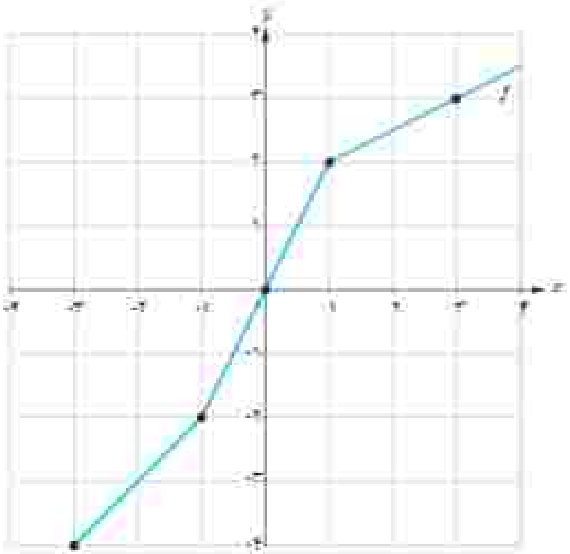
۴ توابع زیر یک‌به‌یک نیستند. با محدود کردن دامنهٔ آنها توابعی یک‌به‌یک بسازید و ضابطهٔ وارون آنها را به‌دست آورید.

الف) $f(x) = |x|$

ب) $g(x) = -x^2$

پ) $h(x) = x^2 + 4x + 3$

۵ از نمودار تابع f برای تکمیل جدول استفاده کنید.



x	-4	-2	2	3
$f^{-1}(x)$	...	...	...	...

۶ با محدود کردن دامنهٔ تابع $f(x) = x^2 - 4x + 5$، یک تابع یک‌به‌یک به‌دست آورده و دامنه و بردِ f و وارون آن را بنویسید و این دو تابع را رسم کنید.

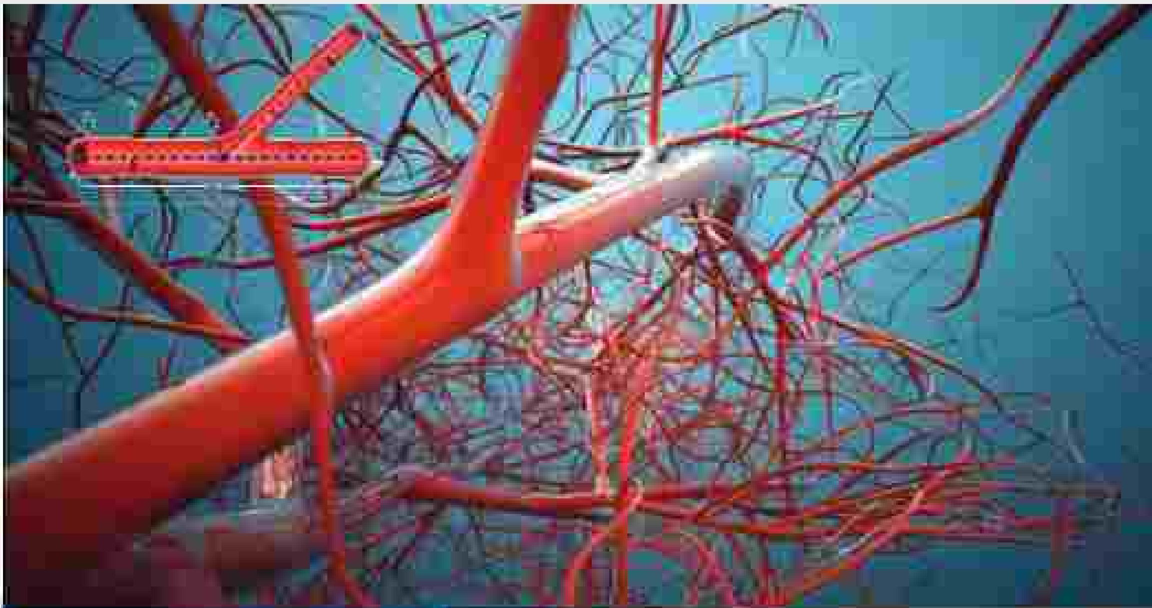
۷ اگر $f(x) = \dfrac{1}{8}x - 3$ و $g(x) = x^3$، مقادیر زیر را به‌دست آورید.

الف) $(fog)^{-1}(5)$ ب) $(f^{-1}of^{-1})(6)$ پ) $(g^{-1}of^{-1})(5)$

روستای رنگی داللار ـ آذربایجان شرقی

فصل ۲

مثلثات

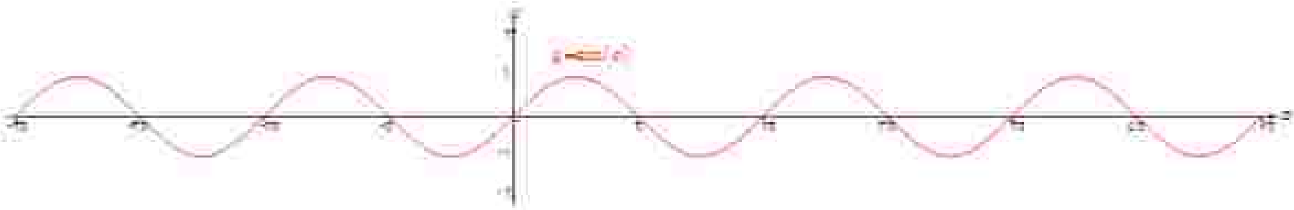


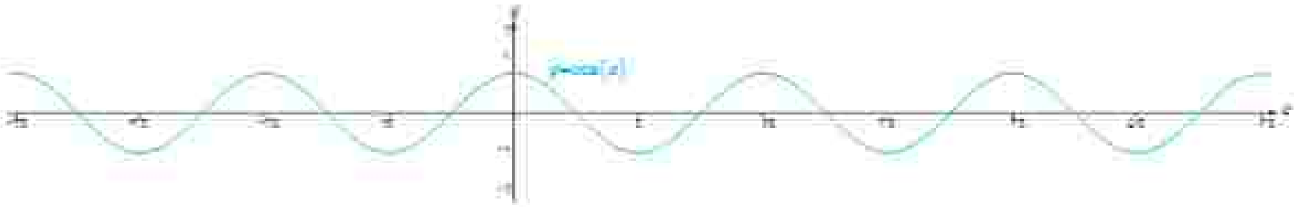
انشعاب رگ‌ها در بدن انسان به‌گونه‌ای است که مقاومت هیدرولیکی درون رگ‌ها تابعی مثلثاتی از زاویه بین هر دو رگ متصل بهم است. در شبیه‌سازی کامپیوتری از شبکه رگ‌ها این خاصیت مورد توجه قرار می‌گیرد.

درس اوّل

تناوب و تانژانت

با توابع مثلثاتی $f(x)=\sin x$ و $f(x)=\cos x$ در سال گذشته آشنا شدیم و دیدیم که در آنها مقادیر تابع برای هر دو نقطه به فاصلهٔ 2π روی محور xها یکسان است ($\sin(x\pm 2k\pi)=\sin x$ و $\cos(x\pm 2k\pi)=\cos x$) به عبارتی اگر تکه‌ای از نمودار این توابع را در بازه‌ای به طول 2π داشته باشیم، با تکرار این تکه می‌توان نمودار توابع فوق را به دست آورد. این مطلب را می‌توانید در شکل‌های زیر مشاهده نمایید.



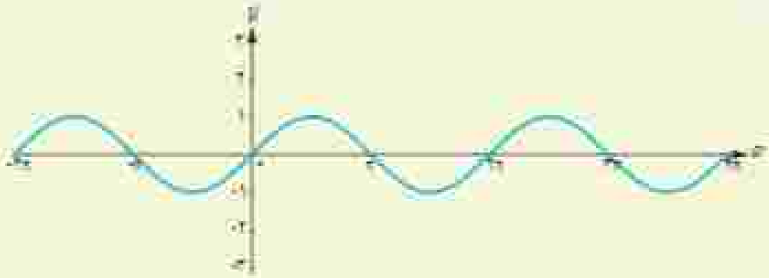
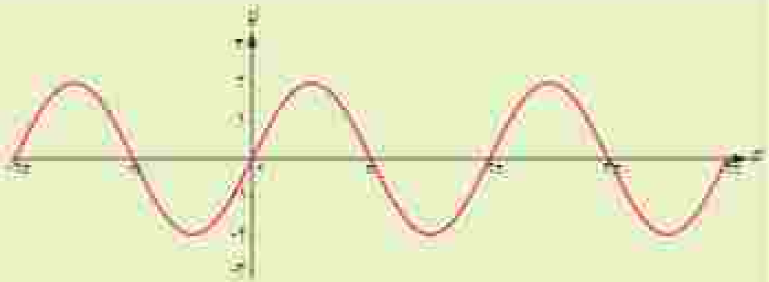
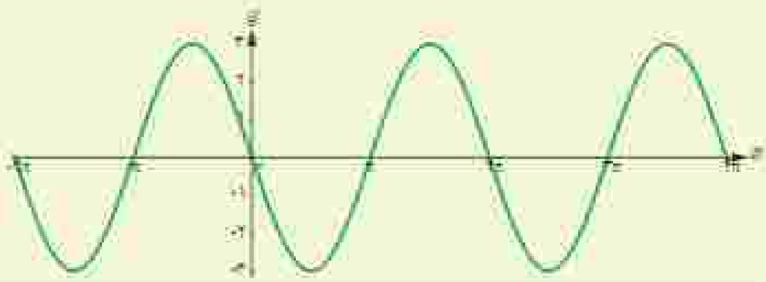
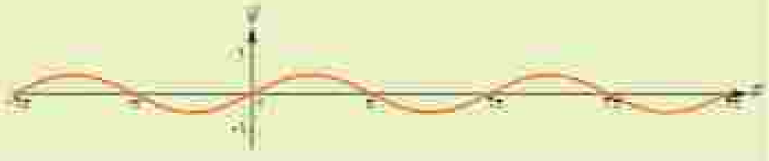
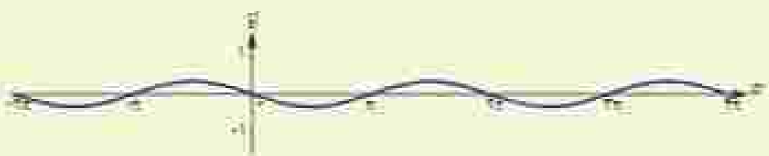


با دقت به نمودار توابع فوق می‌توان مشاهده کرد که نمودار در بازه‌هایی به طول 2π، 4π، 6π و ... تکرار می‌شود. اما کوچک‌ترین بازه‌ای که نمودار این توابع در آن تکرار شده است، همان 2π است. چنین توابعی را توابع متناوب و 2π را دورهٔ تناوب آنها می‌نامیم.

تعریف: تابع f را متناوب می‌نامیم هرگاه یک عدد حقیقی مثبت مانند T موجود باشد به طوری که برای هر $x\in D_f$ داشته باشیم $x\pm T\in D_f$ و $f(x\pm T)=f(x)$.
کوچک‌ترین عدد مثبت T با این خاصیت را **دورهٔ تناوب** f می‌نامیم.

فعالیت

۱ می‌دانیم دورهٔ تناوب تابع $f(x)=\sin x$ ($f(x)=\cos x$) برابر 2π و مقادیر ماکزیمم و مینیمم این تابع به ترتیب ۱ و -1 است. در ادامه می‌خواهیم با بررسی نمودارهای داده شده، تأثیر ضریب a را در تابع $f(x)=a\sin x$ بر دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم این تابع بررسی نماییم.

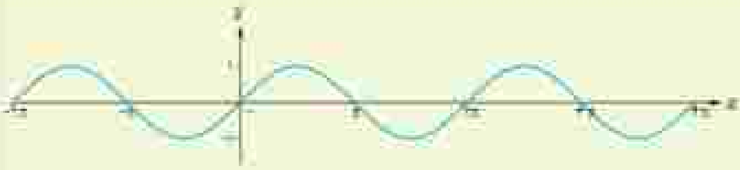
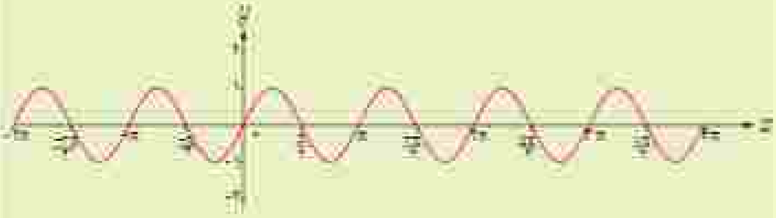
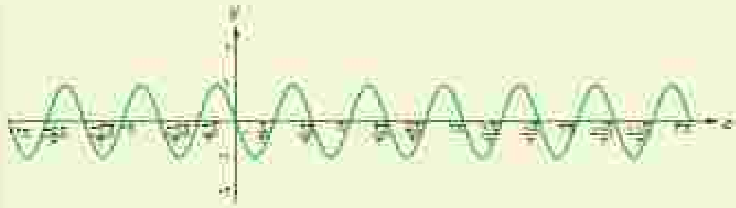
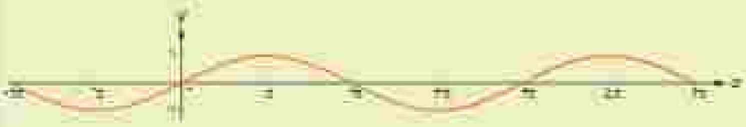
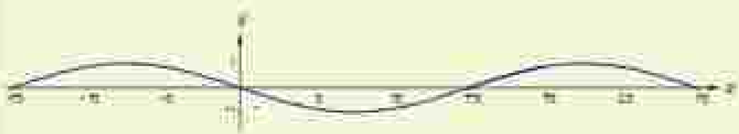
دورهٔ تناوب	مینیمم	ماکزیمم	نمودار تابع	تابع
2π	-1	1		$y=\sin x$
...	...	...		$y=2\sin x$
...	...	...		$y=-3\sin x$
...	...	...		$y=\frac{1}{2}\sin x$
...	...	...		$y=-\frac{1}{3}\sin x$

۲ با توجه به نمودارهای فوق دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y=a\sin x$ را مشخص نمایید.

۳ با توجه به آنچه در مورد انتقال توابع می‌دانید مشخص نمایید دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y=a\sin x+c$ چگونه است. با انجام مراحلی مشابه مراحل بالا می‌توان نشان داد دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم توابع $y=a\cos x$ و $y=a\cos x+c$ نیز مانند آنچه گفته شد به دست می‌آید.

فعالیت

۱ با دقت در نمودار هر یک از توابع داده شده زیر، دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک را تشخیص دهید. در ادامه می‌خواهیم با بررسی نمودارهای داده شده، تأثیر ضریب b در تابع $y = \sin bx$ را بر دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم این تابع بررسی کنیم.

دورهٔ تناوب	مینیمم	ماکزیمم	نمودار تابع	تابع
2π	-1	1		$y = \sin x$
...	...	...		$y = \sin 2x$
...	...	...		$y = \sin(-3x)$
...	...	...		$y = \sin \frac{x}{2}$
...	...	...		$y = \sin(-\frac{x}{2})$

۲ با توجه به نمودارهای فوق دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = \sin bx$ را مشخص نمایید.

۳ با توجه به آنچه در مورد انتقال توابع می‌دانیم، مشخص نمایید دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = \sin bx + c$ چگونه است.

با انجام مراحلی مشابه مراحل بالا می‌توان نشان داد دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم توابع $y = \cos bx$ و $y = \cos bx + c$ نیز مانند آنچه گفته شد به دست می‌آید.

همان‌طور که در فعالیت‌های قبل دیدیم در توابع $y = a\sin bx + c$ و $y = a\cos bx + c$ ضریب a در دورهٔ تناوب تابع بی‌تأثیر است، اما در مقدار ماکزیمم و مینیمم تابع تأثیرگذار است. برعکس، ضریب b در دورهٔ تناوب تابع تأثیرگذار و در مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع بی‌تأثیر است. مقدار c نیز از آنجا که فقط باعث انتقال نمودار می‌شود، در دورهٔ تناوب بی‌تأثیر است و صرفاً در مقدار ماکزیمم و مینیمم تابع تأثیرگذار است.

توابع $y = a\sin bx + c$ و $y = a\cos bx + c$ دارای مقدار ماکزیمم $|a| + c$ و مقدار مینیمم $-|a| + c$ و دورهٔ تناوب $\frac{2\pi}{|b|}$ است.

بنابراین با داشتن ضابطهٔ تابعی به صورت فوق می‌توان مقادیر ماکزیمم و مینیمم و دورهٔ تناوب تابع را به دست آورد و برعکس با داشتن مقادیر ماکزیمم، مینیمم و دورهٔ تناوب یک تابع مثلثاتی، می‌توان ضابطهٔ تابع مورد نظر را به دست آورد.

مثال : دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک از توابع زیر را مشخص نمایید.

الف) $y = 3\sin(2x) - 2$

ب) $y = -\frac{1}{4}\cos(\pi x)$

پ) $y = \pi\sin(-x) + 1$

ت) $y = 8\cos(\frac{x}{3})$

حل :

الف) $\max = |3| - 2 = 1$ $\quad \min = -|3| - 2 = -5$ $\quad T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

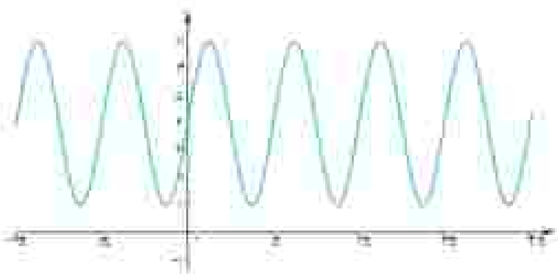
ب) $\max = \left|-\frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4}$ $\quad \min = -\left|-\frac{1}{4}\right| = -\frac{1}{4}$ $\quad T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$

پ) $\max = |\pi| + 1 = \pi + 1$ $\quad \min = -|\pi| + 1 = 1 - \pi$ $\quad T = \frac{2\pi}{|-1|} = 2\pi$

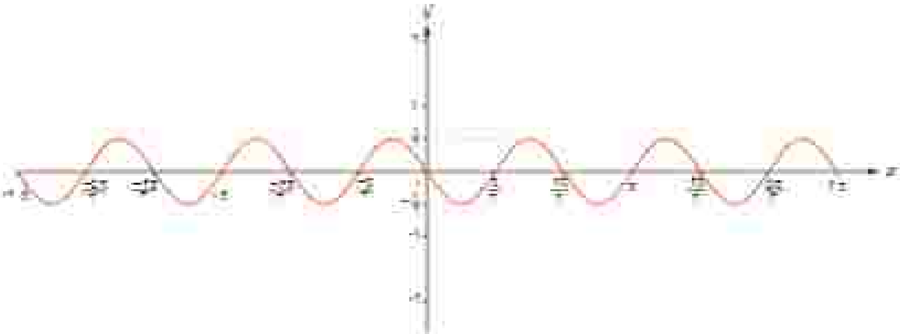
ت) $\max = |8| = 8$ $\quad \min = -|8| = -8$ $\quad T = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{3}\right|} = 6\pi$

مثال : هر یک از نمودارهای داده شده در زیر مربوط به تابعی با ضابطهٔ $f(x) = a\sin bx + c$ یا $f(x) = a\cos bx + c$ است. با دقت در شکل نمودار و تشخیص دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع، ضابطهٔ آن را مشخص نمایید.

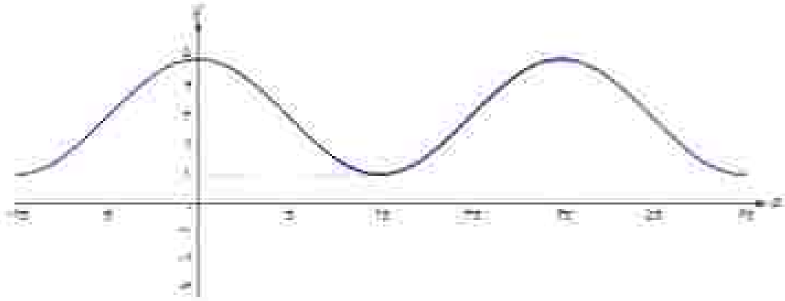
الف)



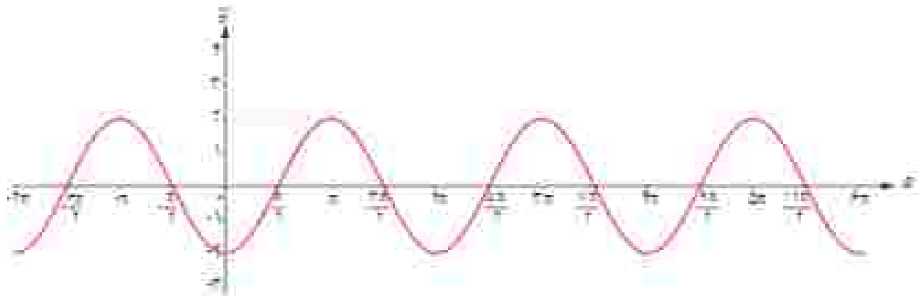
ب)



پ)



ت)



حل : الف) با توجه به شکل، نمودار تابع مورد نظر می‌تواند به صورت $y = a\sin bx + c$ باشد و مقادیر ماکزیمم و مینیمم آن برابر ۷ و ۱ و دورهٔ تناوب برابر π است. لذا $T = \frac{2\pi}{|b|} = \pi$ و بنابراین $|b| = 2$.

از طرفی چون مقادیر ماکزیمم و مینیمم به ترتیب $|a| + c$ و $-|a| + c$ است، بنابراین همواره مقدار c میانگین مقادیر ماکزیمم و مینیمم است، داریم $c = 4$ و در نتیجه $|a| = 3$.

با توجه به تأثیری که منفی بودن هر کدام از a و b بر قرینه شدن نمودار تابع نسبت به محورهای x و y دارد، هر دوی a و b باید مثبت باشند لذا ضابطهٔ تابع مورد نظر به صورت مقابل است : $y = 3\sin(2x) + 4$

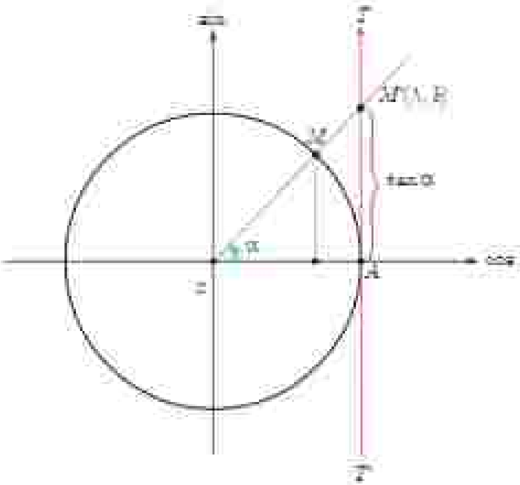
ب) با توجه به نمودار، ضابطهٔ تابع مورد نظر می‌تواند به صورت $y = a\sin bx + c$ باشد و با توجه به مقادیر ماکزیمم و مینیمم و دورهٔ تناوب از روی نمودار، $c = 0$ و $|a| = \frac{1}{2}$ و $|b| = 3$ به دست می‌آید که در آن علامت a منفی (مثبت) و b مثبت (منفی) است. بنابراین داریم $y = -\frac{1}{2}\sin 3x$

پ) با توجه به شکل نمودار، ضابطهٔ تابع مورد نظر می‌تواند به صورت $y = a\cos bx + c$ باشد و مقادیر ماکزیمم و مینیمم آن برابر ۵ و ۱ و دورهٔ تناوب برابر 4π است. بنابراین $c = 3$ و $|b| = \frac{1}{2}$ و $|a| = 2$. لذا $a = 2$ و $b = \frac{1}{2}$ و بنابراین داریم $y = 2\cos(\frac{x}{2}) + 3$.

ت) ضابطهٔ این نمودار نیز می‌تواند به صورت $y = a\cos bx + c$ باشد و $c = 0$ و $|a| = 2$ و $|b| = 1$ و a منفی و b مثبت است. بنابراین داریم $y = -2\cos x$

تانژانت

فعالیت



در دایرهٔ مثلثاتی روبه‌رو خط TAT' در نقطهٔ A بر محور کسینوس‌ها عمود است.

الف) زاویهٔ α را در ربع اول دایره مثلثاتی در نظر می‌گیریم و پاره‌خط OM را امتداد می‌دهیم تا این خط را در نقطهٔ M' قطع کند. نشان دهید:

$\tan\alpha = AM' = b$

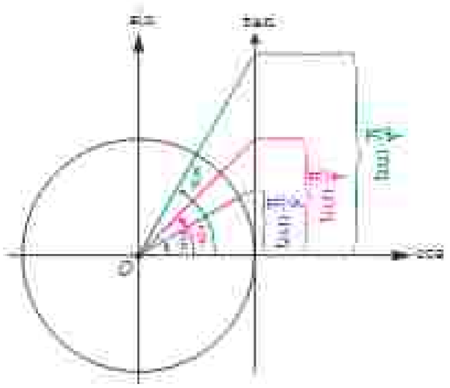
می‌توان دید که تانژانت هر زاویه دلخواه مانند α، به همین ترتیب از برخورد امتداد ضلع دوم آن زاویه با خط TAT' تعیین می‌شود. بنابراین خط TAT' را محور تانژانت می‌نامیم. نقطهٔ A مبدأ این محور است و جهت مثبت محور، از پایین به سمت بالا است.

ب) چرا تانژانت زوایایی که انتهای کمان آنها در ربع اول و سوم قرار دارد، مقداری مثبت و تانژانت زوایایی که انتهای کمان آنها در ربع دوم و چهارم قرار دارد، مقداری منفی است؟

پ) آیا $\tan\frac{\pi}{2}$ عددی حقیقی است؟ $\tan\frac{3\pi}{2}$ چطور؟ به کمک شکل، پاسخ خود را توجیه کنید.

تغییرات تانژانت

فعالیت



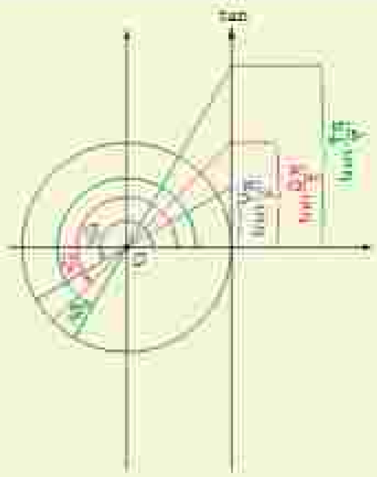
با تغییر زاویهٔ α مقدار تانژانت آن نیز تغییر می‌کند. ابتدا این تغییرات را در ربع اول دایرهٔ مثلثاتی بررسی می‌کنیم. اگر $\alpha = 0$، مقدار $\tan\alpha$ نیز برابر صفر است و با افزایش اندازهٔ α، مقدار $\tan\alpha$ نیز افزایش می‌یابد.

الف) با افزایش مداوم مقادیر زاویهٔ α در ربع اول و نزدیک شدن آن به $\frac{\pi}{2}$، مقادیر تانژانت تا چه حد افزایش می‌یابد؟

ب) توضیح دهید اگر عدد حقیقی و مثبت a را داشته باشیم، چگونه می‌توان زاویه‌ای مانند α یافت، به طوری که $\tan\alpha = a$؛

کار در کلاس

الف) با بررسی تغییرات مقادیر تانژانت در ربع‌های دوم، سوم و چهارم مشخص کنید روند این تغییر در هر ربع افزایشی است یا کاهشی؟
ب) بازهٔ تغییرات مقدار تانژانت را در هر ربع بنویسید.

ربع	چهارم	سوم	دوم
زاویه			
افزایشی یا کاهشی	....	....	....
بازهٔ تغییرات	....	....	....

پ) جدول زیر را کامل کنید. (علامت ↗ به معنی افزایش یافتن و علامت ↘ به معنی کاهش یافتن است.)

ربع چهارم					ربع سوم				ربع دوم				ربع اول			
۲π	$\frac{۱۱\pi}{۶}$	$\frac{۷\pi}{۴}$	$\frac{۵\pi}{۳}$	$\frac{۳\pi}{۲}$	$\frac{۴\pi}{۳}$	$\frac{۵\pi}{۴}$	$\frac{۷\pi}{۶}$	π	$\frac{۵\pi}{۶}$	$\frac{۳\pi}{۴}$	$\frac{۲\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۶}$	۰
۰	...	...	...		...	...	...	۰	...	-۱	...	$+\infty$ ↗	...	...	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ↗	۰

تابع تانژانت

همان‌طور که می‌بینیم به ازای هر زاویهٔ دلخواه در دایرهٔ مثلثاتی (به جز $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ ، $k \in \mathbb{Z}$)، عددی حقیقی به عنوان $\tan x$ داریم و تابعی با ضابطهٔ $y = \tan x$ مشخص می‌کند. دامنهٔ این تابع مجموعهٔ $D = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ است و برد آن مجموعه اعداد حقیقی است. به سادگی می‌توان دید تابع $y = \tan x$، تابعی متناوب است[1] و دوره تناوب آن π است، زیرا :

$\tan(\pi + x) = \tan x$

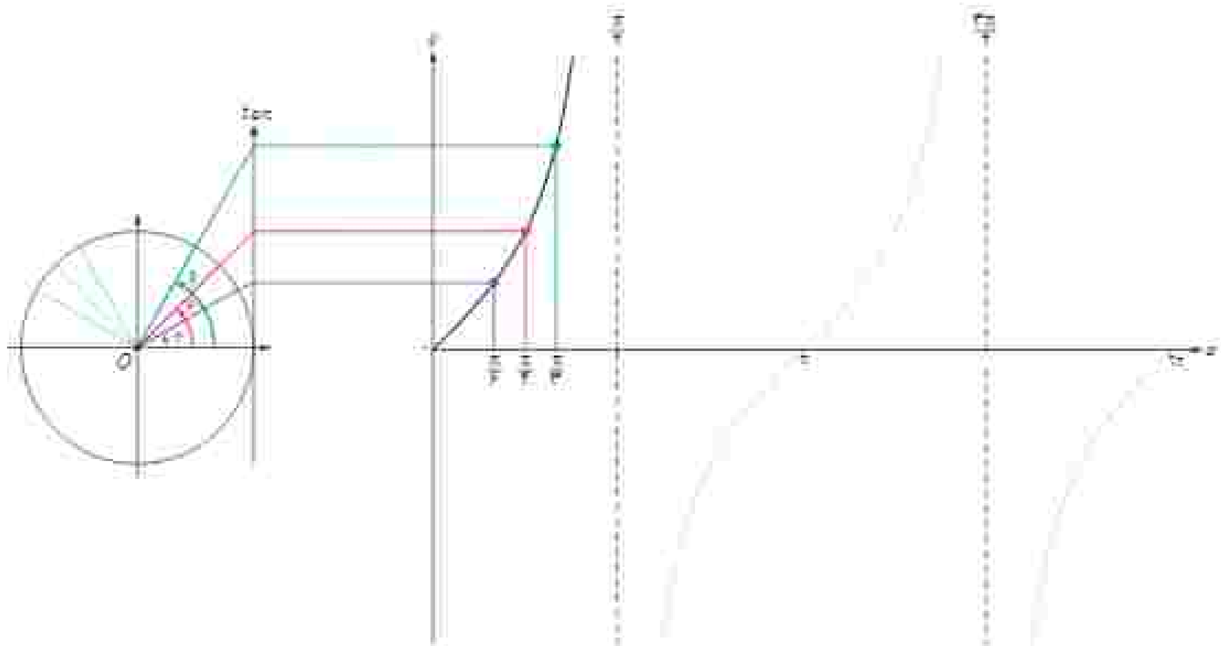
کار در کلاس

صعودی یا نزولی بودن تابع $y = \tan x$ را در مجموعهٔ $[0, 2\pi] - \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$ بررسی کنید.

رسم تابع $y = \tan x$

فعالیت

در شکل زیر نمودار تابع $y = \tan x$ در ربع اول رسم شده است. مشابه آن، نمودار این تابع را در ربع‌های دیگر رسم کنید.



۱ــ به دست آوردن دوره تناوب توابع شامل tan مد نظر نیست.

تمرین

۱ دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

الف) $y = 1 + 2\sin 7x$

ب) $y = \sqrt{3} - \cos\frac{\pi}{2}x$

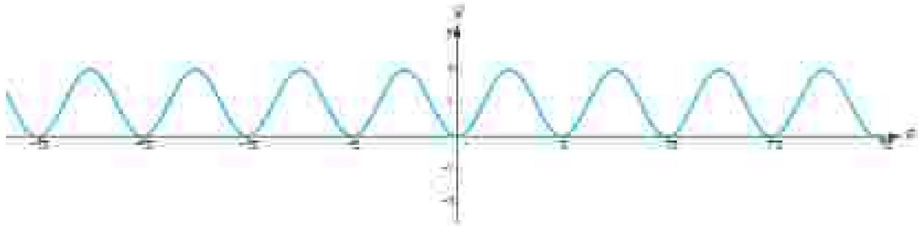
پ) $y = -\pi\sin(\frac{x}{2}) - 2$

ت) $y = -\frac{3}{4}\cos 3x$

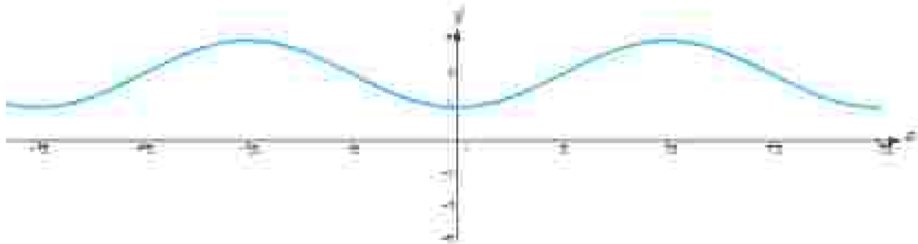
۲ هر یک از توابع داده شده را با نمودارهای زیر نظیر کنید.

الف) $y = \sin\pi x$ ب) $y = 2 - \cos\frac{1}{2}x$ پ) $y = \sin 2x$ ت) $y = 1 - \cos 2x$

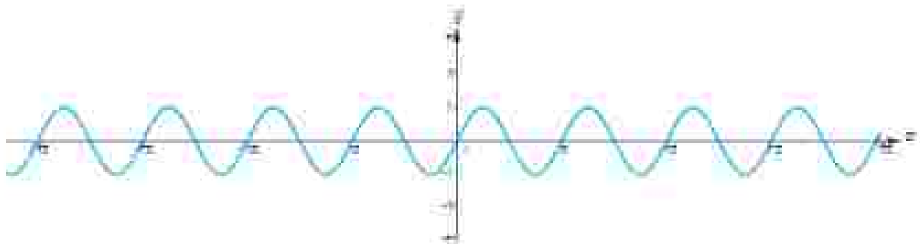
۱)



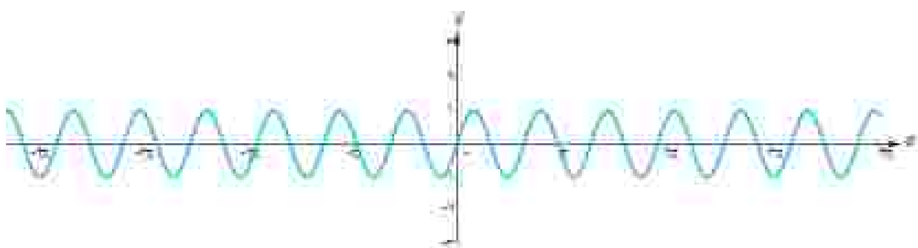
۲)



۳)



۴)



۳ در هر مورد ضابطهٔ تابعی مثلثاتی با دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم داده شده بنویسید.

الف) $T=\pi \quad , \quad \max=۳ \quad , \quad \min=-۳$

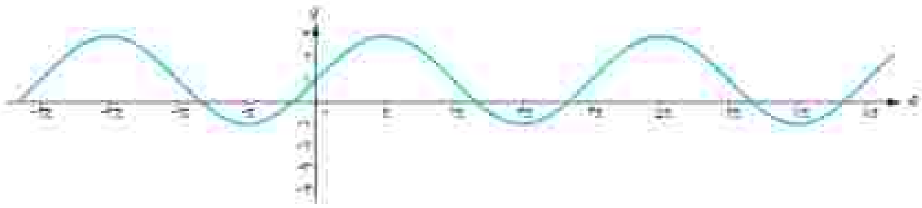
ب) $T=۳ \quad , \quad \max=۹ \quad , \quad \min=۳$

پ) $T=۴\pi \quad , \quad \max=-۱ \quad , \quad \min=-۷$

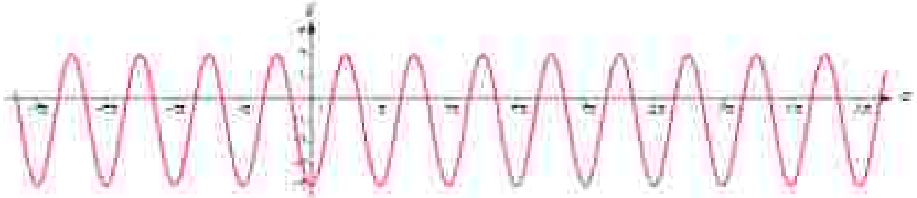
ت) $T=\frac{\pi}{۲} \quad , \quad \max=۱ \quad , \quad \min=-۱$

۴ ضابطهٔ مربوط به هر یک از نمودارهای داده شده را بنویسید.

الف)



ب)



۵ کدام یک از جملات زیر درست و کدام یک نادرست است؟

الف) تابع تانژانت در دامنه‌اش صعودی است.

ب) می‌توان بازه‌ای یافت که تابع تانژانت در آن نزولی باشد.

پ) تابع تانژانت در هر بازه که در آن تعریف شده باشد، صعودی است.

۶ با توجه به محورهای سینوس و تانژانت، در موارد زیر مقادیر $\sin\alpha$ و $\tan\alpha$ را با هم مقایسه کنید:

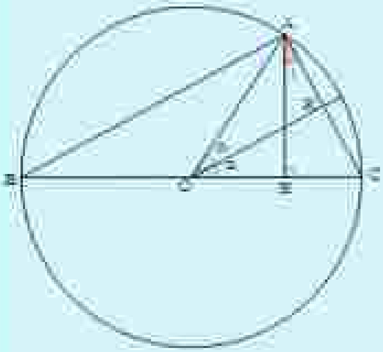
الف) $۰<\alpha<\frac{\pi}{۲}$ ب) $\frac{۳\pi}{۲}<\alpha<۲\pi$

درس دوم

معادلات مثلثاتی

نسبت‌های مثلثاتی زوایای دو برابر کمان

در محاسبات فنی گاهی نسبت مثلثاتی برخی زوایا مورد نیاز است که مقدار آن را می‌توان به کمک دیگر زوایا به‌دست آورد. اگر مقدار $\cos 15^\circ$ را نیاز داشته باشیم چگونه می‌توان آن را با استفاده از مقدار $\cos 30^\circ$ به دست آورد؟ به وضوح 15° نصف 30° است و نیز می‌دانیم $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$. آیا با نصف کردن مقدار $\cos 30^\circ$ می‌توان $\cos 15^\circ$ را به دست آورد؟ در ادامه خواهیم دید که جواب منفی است ولی همچنان می‌شود مقدار $\cos 15^\circ$ را به کمک مقدار معلوم $\cos 30^\circ$ یافت اما نه با نصف کردن.[1]



دایره روبه‌رو به شعاع واحد و مرکز O را در نظر بگیرید. مطابق شکل، زاویه مرکزی O برابر 2α داده شده که روبه‌رو به وتر AC است. از این رو در مثلث $O\overset{\Delta}{A}H$ داریم:

$$AH = \sin\alpha \Rightarrow AC = 2AH = 2\sin\alpha \qquad (1)$$

همچنین $\widehat{AC} = 2\alpha$ و از آنجا که زاویه محاطی B روبه‌رو به $\widehat{AC}$ است، لذا نصف آن است پس: $\hat{B} = \alpha$.

از طرفی $\hat{A}$ یک زاویه محاطی روبه‌رو به قطر BC است و لذا: $\hat{A} = 90^\circ$

همچنین از مجموع زوایای $A\overset{\Delta}{B}C$ به‌دست می‌آید:

$$A\overset{\Delta}{B}C: \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow 90^\circ + \alpha + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{C} = 90^\circ - \alpha$$

به‌طور مشابه در $A\overset{\Delta}{H}C$ داریم:

$$A\overset{\Delta}{H}C: \hat{H} + \hat{A}_1 + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow 90^\circ + \hat{A}_1 + 90^\circ - \alpha = 180^\circ \Rightarrow \hat{A}_1 = \alpha$$

اکنون ضلع AH را در $O\overset{\Delta}{A}C$ و $A\overset{\Delta}{H}C$ به‌دست آورده و برابر قرار می‌دهیم:

$$\left.\begin{array}{l} O\overset{\Delta}{A}C: AH = \sin 2\alpha \\ A\overset{\Delta}{H}C: \cos\hat{A}_1 = \cos\alpha = \dfrac{AH}{AC} \Rightarrow AH = AC\cos\alpha \xrightarrow{(1)} AH = 2\sin\alpha\cos\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

همچنین در $O\overset{\Delta}{A}H$ داریم: $OH = \cos 2\alpha$ و در $A\overset{\Delta}{H}C$ داریم:

$$\sin\hat{A}_1 = \sin\alpha = \frac{HC}{AC} \Rightarrow HC = \sin\alpha \times AC = \sin\alpha(2\sin\alpha) = 2\sin^2\alpha$$

از طرفی با توجه به اینکه $OC = 1$ شعاع دایره است پس داریم:

$$OC = OH + HC = 1 \Rightarrow OH = 1 - HC \Rightarrow \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$

و نیز با استفاده از اتحاد مثلثاتی $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ به دست می‌آوریم $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

[1] ــ این روش را ابوالوفا بوزجانی ریاضی‌دان مشهور ایرانی ارائه داده است. طرح اثبات فوق در ارزشیابی‌ها مجاز نیست.

به طور کلی داریم :

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ $\qquad$ $\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ $\qquad$ $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

مثال : مقدار $\cos 15^\circ$ و $\sin 15^\circ$ را بیابید.

$$\sin 30^\circ = 2\sin 15^\circ \cos 15^\circ \qquad \cos 30^\circ = 1-2\sin^2 15^\circ$$

$$\frac{1}{2} = 2\times\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\cos 15^\circ \qquad \frac{\sqrt{3}}{2} = 1-2\sin^2 15^\circ$$

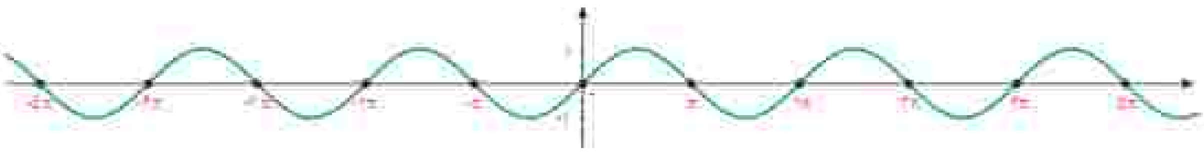
$$\frac{1}{2} = \sqrt{2-\sqrt{3}}\,\cos 15^\circ \qquad \sin^2 15^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}-1}{-2} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

$\cos 15^\circ = \frac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}}$ (۱۵° در ربع اول است.) $\qquad$ $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ (۱۵° در ربع اول است.)

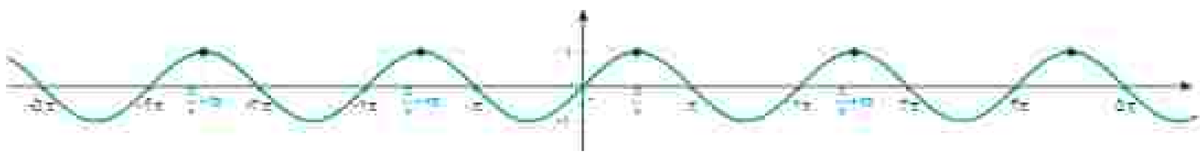
معادلات مثلثاتی

معادله‌ای که در آن اطلاعاتی از نسبت‌های مثلثاتی یک زاویهٔ مجهول داریم، یک معادلهٔ مثلثاتی نام دارد.

مثال : تابع مثلثاتی $y=\sin x$ را که نمودار آن در زیر رسم شده است در نظر بگیرید.



همان‌طور که از نمودار پیداست، صفرهای این تابع جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin x=0$ می‌باشد. به عبارت دیگر جواب‌های این معادله که به‌صورت $x = \dots, -3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$ می‌باشند، محل تقاطع تابع ثابت $y=0$ (یعنی محور xها) و تابع $y=\sin x$ است.
این جواب‌ها را می‌توان به صورت کلی $x=k\pi$ که k یک عدد صحیح است نمایش داد.
به‌طور مشابه جواب‌های معادله $\sin x=1$ مقادیری از x هستند که به ازای آنها مقدار $\sin x$ برابر ۱ می‌شود. این مقادیر محل تقاطع $y=1$ و $y=\sin x$ است که در نمودار زیر رسم شده‌اند.



جواب‌های معادلهٔ صفحهٔ قبل به‌صورت

$$x = \cdots, \frac{\pi}{2} - 4\pi, \frac{\pi}{2} - 2\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 2\pi, \cdots$$

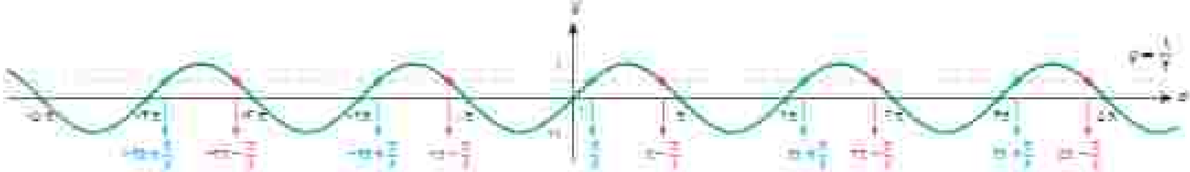
می‌باشند که به‌صورت کلی $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ قابل نمایش است.

اکنون معادلهٔ $\sin x = \frac{1}{2}$ را در نظر می‌گیریم. فعالیت زیر به شما کمک می‌کند تا جواب‌های این معادله را بیابید.

فعالیت

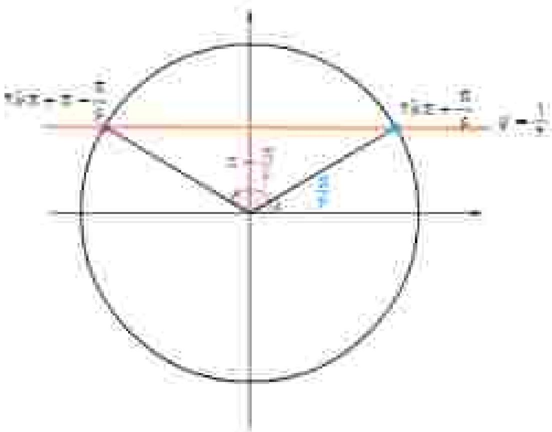
۱ چند زاویه را که مقدار سینوس آنها برابر $\frac{1}{2}$ است مثال بزنید.

۲ خط $y = \frac{1}{2}$ و نمودار $y = \sin x$ را در زیر رسم کرده‌ایم. مقادیری را که مثال زده‌اید روی نمودار پیدا کنید. این مقادیر متناظر با چه نقاطی از شکل زیر می‌باشند؟ آیا مقادیری که پیدا کرده‌اید در بین نقاط نمایش داده شده در زیر هستند؟



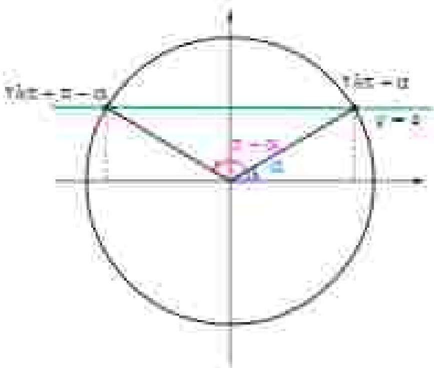
۳ طول تعدادی از نقاط تقاطع دو نمودار $y = \frac{1}{2}$ و $y = \sin x$ را که در شکل فوق مشخص شده‌اند، در معادلهٔ $\sin x = \frac{1}{2}$ جایگذاری کنید. آیا در معادله صدق می‌کنند؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۴ در دایرهٔ مثلثاتی زیر خط $y = \frac{1}{2}$ و زوایای $\frac{\pi}{6}$ و $\pi - \frac{\pi}{6}$ که سینوس آنها برابر $\frac{1}{2}$ است رسم شده‌اند. کدام دسته از زوایای مشخص شده بر روی نمودار سؤال قبل هم انتها با زاویهٔ $\frac{\pi}{6}$ و کدام دسته هم انتها با زاویهٔ $\pi - \frac{\pi}{6}$ هستند؟ آنها را در جاهای خالی زیر مرتب کنید. آیا می‌توانید دو دستهٔ زیر را از دو طرف ادامه دهید؟



هم انتها با $\frac{\pi}{6}$: ......, $-2\pi + \frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6}$, $2\pi + \frac{\pi}{6}$, ...

هم انتها با $\pi - \frac{\pi}{6}$: ......, $-\pi - \frac{\pi}{6}$, $\pi - \frac{\pi}{6}$, $3\pi - \frac{\pi}{6}$, ...



برای عدد حقیقی $-1\leq a\leq 1$ که $\sin x=a$، زاویه‌ای مانند α وجود دارد که برای آن داریم $\sin\alpha=a$. بنابراین معادله $\sin x=a$ به‌صورت $\sin x=\sin\alpha$ بازنویسی می‌شود.
اکنون برای یافتن جواب‌های معادله $\sin x=\sin\alpha$ باید رابطه بین کمان‌های x و α را بیابیم.
با توجه به دایره مثلثاتی روبه‌رو رابطه بین کمان معلوم α و کمان‌های مجهول x به‌طوری که $\sin x=\sin\alpha$ در دوران‌های مختلف به‌صورت زیر است:

$\sin x=\sin\alpha \Rightarrow x=2k\pi+\alpha$ و $x=(2k+1)\pi-\alpha \quad , \quad k\in\mathbb{Z}$

جواب‌های کلی معادله $\sin x=\sin\alpha$ به‌صورت $x=2k\pi+\alpha$ و $x=(2k+1)\pi-\alpha$ می‌باشند که $k\in\mathbb{Z}$.

مثال: معادلهٔ $\sin x=-\frac{1}{2}$ را حل کنید.

$$\sin x=-\frac{1}{2}$$
$$\sin x=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$
$$\begin{cases} x=2k\pi-\frac{\pi}{6} & , k\in\mathbb{Z} \\ x=2k\pi+\frac{7\pi}{6} & , k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

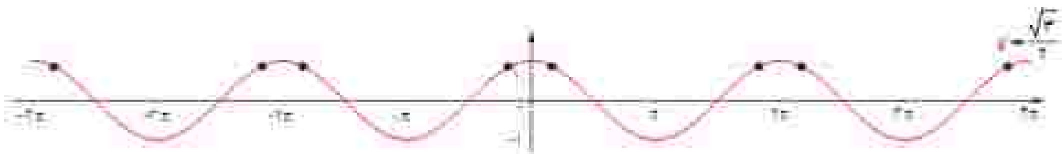
کار در کلاس

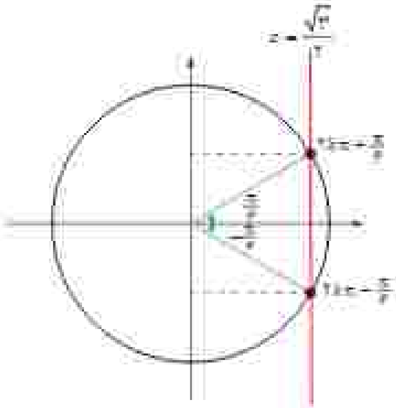
معادلات زیر را حل کنید.

الف) $2\sin x-\sqrt{3}=0$ 　　　 ب) $4\sin x+\sqrt{8}=0$

فعالیت

نمودار تابع $y=\cos x$ و خط $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ در زیر رسم شده‌اند. مشابه فعالیت قبل به سؤالات زیر پاسخ دهید تا جواب‌های معادله $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ را بیابید.

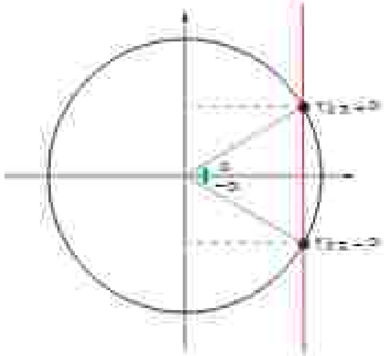




الف) برخی از جواب‌های معادله $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ را با توجه به نقاط تقاطع دو نمودار پیدا کنید.

ب) با استفاده از دایره مثلثاتی روبه‌رو و محل تقاطع خط $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ با دایره مثلثاتی، جواب‌های معادله فوق را به‌دست آورید.

برای هر عدد حقیقی $-1\le a\le 1$ در معادله $\cos x=a$ زاویه‌ای چون α وجود دارد که $\cos\alpha=a$.



بنابراین برای حل معادله فوق کافی است ابتدا آن را به‌صورت $\cos x=\cos\alpha$ نوشته و سپس رابطه بین زوایای x و α را با توجه به دایره مثلثاتی روبه‌رو به‌صورت زیر به دست آوریم.

$\cos x=\cos\alpha \Rightarrow x=2k\pi+\alpha$ و $x=2k\pi-\alpha$, $k\in\mathbb{Z}$

جواب‌های کلی معادله $\cos x=\cos\alpha$ به‌صورت $x=2k\pi\pm\alpha$ می‌باشند که $k\in\mathbb{Z}$.

مثال : جواب‌های معادله $\cos x=\frac{1}{2}$ را به‌دست آورید. کدام جواب‌ها در بازه $[-3\pi,\pi]$ می‌باشند؟

می‌دانیم $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ پس معادله به‌صورت $\cos x=\cos\frac{\pi}{3}$ می‌باشد. بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند:

$x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$, $k\in\mathbb{Z}$

اکنون با جایگذاری مقادیر صحیح به جای k در عبارت فوق نتیجه می‌شود که جواب‌های $x=-2\pi-\frac{\pi}{3}, -2\pi+\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$ از معادله فوق در بازه داده شده می‌باشند.

مثال : معادله $\sin 2x=\sin 3x$ را حل کنید.

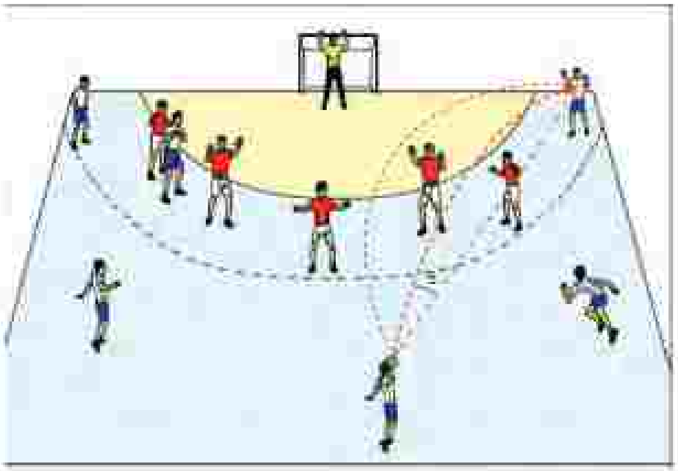
می‌دانیم که جواب‌های این معادله به شکل زیر هستند:

$$\begin{cases} 2x=2k\pi+3x \Rightarrow x=-2k\pi & , k\in\mathbb{Z} \\ 2x=(2k+1)\pi-3x \Rightarrow x=\frac{(2k+1)\pi}{5} & , k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

مثال : معادله $2\sin 3x-\sqrt{2}=0$ را حل کنید.

$$2\sin 3x-\sqrt{2}=0$$
$$2\sin 3x=\sqrt{2}$$

$$\sin 3x=\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin 3x=\sin\frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} 3x=2k\pi+\frac{\pi}{4} \Rightarrow x=\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{12} & ,k\in\mathbb{Z} \\ 3x=(2k+1)\pi-\frac{\pi}{4} \Rightarrow x=\frac{(2k+1)}{3}\pi-\frac{\pi}{12} & ,k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$



مثال : یک بازیکن هندبال توپ را با سرعت $16\ m/s$ برای هم‌تیمی خود که در ۱۲/۸ متری او قرار دارد پرتاب می‌کند. اگر رابطه بین سرعت توپ v (بر حسب متر بر ثانیه)، مسافت طی شده افقی d (بر حسب متر) و زاویه پرتاب θ به صورت زیر باشد، آنگاه زاویه پرتاب توپ چقدر بوده است؟

$$d=\frac{v^2\sin 2\theta}{10}$$

از رابطه داده شده به دست می‌آید :

$$12/8=\frac{(16)^2\sin 2\theta}{10} \Rightarrow \sin 2\theta=\frac{12/8\times 10}{256} \Rightarrow \sin 2\theta=\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 2\theta=2k\pi+\frac{\pi}{6} & ,k\in\mathbb{Z} \\ 2\theta=(2k+1)\pi-\frac{\pi}{6} & ,k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

با توجه به شکل، جواب قابل قبول $\theta=\frac{\pi}{12}$ و $\theta=\frac{5\pi}{12}$ می‌باشند.

مثال : جواب‌های معادله $\sin x\cos x=\frac{\sqrt{3}}{4}$ را به دست آورید.

$$2\sin x\cos x=2\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 2x=\sin\frac{\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} 2x=2k\pi+\frac{\pi}{3} \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{6} & ,k\in\mathbb{Z} \\ 2x=(2k+1)\pi-\frac{\pi}{3} \Rightarrow x=\frac{(2k+1)\pi}{2}-\frac{\pi}{6} & ,k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

مثال : معادله $\cos x(2\cos x-9)=5$ را حل کنید.

ابتدا این معادله را بصورت $2\cos^2 x-9\cos x-5=0$ می‌نویسیم. با تغییر متغیر $\cos x=t$ می‌توان معادله فوق را به معادله درجه دوم $2t^2-9t-5=0$ تبدیل کرد. جواب‌های این معادله $t=-\frac{1}{2}$ و $t=5$ است. بنابراین جواب‌های معادله مثلثاتی بالا از حل دو معادله ساده $\cos x=5$ و $\cos x=-\frac{1}{2}$ بدست می‌آیند. از آنجا که $\cos x=5$ جواب ندارد (چرا؟) فقط جواب‌های معادله $\cos x=-\frac{1}{2}$ را بدست می‌آوریم.

$$\cos x=-\frac{1}{2} \Rightarrow \cos x=\cos\frac{2\pi}{3} \Rightarrow x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

تمرین

۱ فرض کنید $\cos\alpha=\frac{5}{13}$ و α زاویه‌ای حاده باشد، حاصل عبارات زیر را بدست آورید.

الف) $\cos 2\alpha$ ب) $\sin 2\alpha$

۲ نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس را برای زاویه $22/5^\circ$ بدست آورید.

۳ معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\sin\frac{x}{2}=\sin 3x$
ب) $\cos 2x-\cos x+1=0$
پ) $\cos x=\cos 2x$
ت) $\cos 2x-3\sin x+1=0$
ث) $\cos^2 x-\sin x=\frac{1}{4}$
ج) $\sin x-\cos 2x=0$

۴ مثلثی با مساحت ۳ سانتی‌متر مربع مفروض است. اگر اندازه دو ضلع آن به ترتیب ۲ و ۶ سانتی‌متر باشند، آنگاه چند مثلث با این خاصیت‌ها می‌توان ساخت؟

فصل ۳

حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت

جزیره هنگام، روستای [illegible]

فیزیکدان معروف، نیلز بور معتقد است که انسان با مشاهدهٔ دریا، حس می‌کند که بخشی از بی‌نهایت را در اختیار دارد. شاید به همین دلیل است که مشاهدهٔ طلوع یا غروب آفتاب در ساحل دریا حس خوشایندی را در ما برمی‌انگیزد. و چه بسا دلیل زیبایی آسمان نیز آن باشد که هیچ انتهایی برای آن دیده نمی‌شود!

درس اول: حد بی‌نهایت

درس دوم: حد در بی‌نهایت

درس اوّل

حد بی‌نهایت

یادآوری و تکمیل

در کلاس یازدهم با مفهوم حد تابع در یک نقطه آشنا شدیم. در فصل حاضر به حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت خواهیم پرداخت. پیش از آن لازم است مطالبی را از پایه قبل یادآوری و تکمیل کنیم. همچنین، برخی پیش‌نیازها باید ارائه گردد.

بخش‌پذیری چندجمله‌ای‌ها بر $(x-a)$:

فعالیت

۱ الف) چندجمله‌ای $f(x)=2x^2-5x+1$ را بر دو جمله‌ای درجه اول $(x-3)$ تقسیم کرده‌ایم. جاهای خالی را پر کنید:

$$\begin{array}{r|l} 2x^2-5x+1 & x-3 \\ \cline{2-2} -(\square-6x) & 2x+\square \\ \cline{1-1} x+1 & \\ -(\square-3) & \\ \cline{1-1} 4 & \end{array}$$

ب) اگر در تقسیم بالا، باقیمانده را با R نشان دهیم، داریم ... = R.

پ) مقدار $f(3)$ را محاسبه کنید.

ت) $f(3)$ و R چه رابطه‌ای با هم دارند؟

ث) رابطه تقسیم را کامل کنید: $2x^2-5x+1=(x-3)(2x+\square)+4$

۲ الف) اکنون می‌خواهیم در حالت کلی چندجمله‌ای دلخواه $f(x)$ را بر دوجمله‌ای درجه اول $(x-a)$ تقسیم کنیم. فرض کنیم خارج‌قسمت این تقسیم، چندجمله‌ای $Q(x)$ و باقیماندهٔ آن عدد ثابت R باشد:

$$\begin{array}{r|l} f(x) & x-a \\ \cline{2-2} & Q(x) \\ \cline{1-1} R & \end{array}$$

رابطهٔ تقسیم به صورت زیر است:

$$f(x)=(x-a)\,Q(x)+R$$

این رابطه، به ازای تمام مقادیر x درست است؛ از جمله به ازای $x=a$. با قرار دادن a به جای x در دو طرف رابطهٔ فوق خواهیم داشت:

$$f(a)=(\cdots-a)\,Q(\cdots)+R$$

ب) از رابطهٔ اخیر مقدار R را به دست آورید.

از فعالیت قبل دیده می‌شود که:

> **قضیه:** در تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر دوجمله‌ای درجهٔ اول $(x-a)$، باقی ماندهٔ تقسیم برابر $f(a)$ است.
>
> **نتیجه:** اگر $f(a)$ برابر صفر باشد آنگاه $f(x)$ بر $(x-a)$ بخش‌پذیر است.

نتیجهٔ حاضر را می‌توان برای تجزیه چندجمله‌ای‌ها به کار برد.

کار در کلاس

۱ در چندجمله‌ای $f(x)=3x^2-5x-2$، مقدار $f(2)$ برابر صفر است. بنابراین $f(x)$ بر $(x-2)$ بخش‌پذیر است. با تکمیل مراحل تقسیم، درستی این مطلب را بررسی کنید.

$$\begin{array}{r|l} 3x^2-5x-2 & x-2 \\ \cline{2-2} -(3x^2-6x) & 3x+\cdots \\ \cline{1-1} x-2 & \\ -(\cdots\cdots) & \\ \cline{1-1} R=\cdots & \end{array}$$

بنابر رابطهٔ تقسیم داریم: $f(x)=3x^2-5x-2=(x-2)(3x+\cdots)$

همانگونه که دیده می‌شود، $f(x)$ به‌صورت حاصل ضرب عامل‌های آن نوشته شده است.

۲ چندجمله‌ای $g(x)=2x^3+x^2+1$ را در نظر بگیرید.

الف) آیا $g(x)$ بر $(x+1)$ بخش‌پذیر است؟ چرا؟

ب) با انجام تقسیم، درستی ادعای خود را بررسی کنید:

$$\begin{array}{r|l} 2x^3+x^2+1 & x+1 \\ \cline{2-2} \end{array}$$

پ) $g(x)$ را به صورت حاصل‌ضرب عامل‌ها بنویسید.

۳ نشان دهید چندجمله‌ای $f(x)=2x^3+5x^2-3x-10$ بر دوجمله‌ای $x+2$ بخش‌پذیر است.

حد توابع کسری

با قضیه زیر از پایهٔ قبل آشنا هستیم:

> **قضیه:** اگر دو تابع f و g در نقطه‌ای به طول a حد داشته باشند و حد آنها در این نقطه به ترتیب l و m باشند به‌طوری که $m\neq 0$، آنگاه تابع $\frac{f}{g}$ نیز در a حد دارد و این حد برابر $\frac{l}{m}$ است.

مثال[1]: $$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x+1}=\frac{12}{6}=2$$

در سال گذشته دیدیم که در یک تابع گویا مثل $\frac{f}{g}$، اگر $f(a)=g(a)=0$، در این صورت دیگر قضیهٔ بالا برای محاسبه حد تابع $\frac{f}{g}$ در a قابلیت استفاده ندارد. در این حالت با توجه به روابط $f(a)=0$ و $g(a)=0$، نتیجه می‌گیریم که چند جمله‌ای‌های $f(x)$ و $g(x)$ هر دو بر عامل $(x-a)$ بخش‌پذیرند. بنابراین با تقسیم صورت و مخرج کسر $\frac{f}{g}$ بر $(x-a)$، تابع گویای دیگری حاصل می‌شود که حد آن در نقطهٔ a، در صورت وجود با حد $\frac{f}{g}$ در a برابر است.

مثال: مقدار $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2+x-2}$ را محاسبه کنید.

حل: صورت و مخرج کسر به ازای $x=1$ برابر صفرند. بنابراین هم صورت و هم مخرج بر $(x-1)$ بخش‌پذیرند. این عامل را به کمک تجزیه، در صورت و مخرج ظاهر و سپس حذف می‌کنیم.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2+x-2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+2)}=\frac{1+1}{1+2}=\frac{2}{3}$$

۱ـ در این بخش از درس اول، حد توابع گویا که درجهٔ صورت و مخرج حداکثر ۳ باشد و همچنین توابع کسری شامل عبارت‌های رادیکالی با درجهٔ حداکثر ۲ مورد بحث هستند. رعایت این مطلب در انواع ارزشیابی‌ها الزامی است.

مثال: حد تابع $f(x)=\frac{2x^3+3x^2+4}{x^3+8}$ را در نقطهٔ $x=-2$ در صورت وجود به دست آورید.

حل: در این مثال نیز صورت و مخرج به ازای $x=-2$ برابر صفرند. باید عامل $(x+2)$ را در صورت و مخرج ظاهر کنیم. مخرج را می‌توانیم به کمک اتحاد مجموع مکعب‌های دو جمله به حاصل‌ضرب عامل‌های اول تجزیه کنیم. اما برای تجزیهٔ صورت، آن را بر $(x+2)$ تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{l|l} 2x^3+3x^2+4 & x+2 \\ \cline{2-2} -(2x^3+4x^2) & 2x^2-x+2 \\ \hline \quad -x^2+4 & \\ \quad -(-x^2-2x) & \\ \hline \qquad 2x+4 & \\ \qquad -(2x+4) & \\ \hline \qquad\quad 0 & \end{array}$$

بنابر رابطهٔ تقسیم می‌توان نوشت $2x^3+3x^2+4=(x+2)(2x^2-x+2)$. بنابراین:

$$\lim_{x\to -2} f(x)=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(2x^2-x+2)}{(x+2)(x^2-2x+4)}=\frac{8+2+2}{4+4+4}=1$$

تذکر: گاهی صورت یا مخرج تابع $\frac{f}{g}$ شامل یک عبارت رادیکالی است و $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=0$. در این حالت برای محاسبه حد $\frac{f}{g}$ در نقطهٔ a لازم است ابتدا صورت و مخرج را در یک عبارت رادیکالی ضرب کنیم تا عامل $(x-a)$ یا عبارتی که موجب صفر شدن f و g شده است، در صورت و مخرج ظاهر شود تا با ساده کردن آن از صورت و مخرج، بتوانیم مقدار حد را در صورت وجود به‌دست آوریم.

مثال: حد تابع $g(x)=\frac{2-\sqrt{x-1}}{x-5}$ را در نقطهٔ به طول $x=5$ در صورت وجود به دست آورید.

حل: هم حد صورت و هم حد مخرج در نقطهٔ ۵ برابر صفرند. صورت و مخرج را در عبارت $2+\sqrt{x-1}$ ضرب می‌کنیم تا صورت کسر عبارتی گویا شود.

$$\lim_{x\to 5} g(x)=\lim_{x\to 5}\frac{2-\sqrt{x-1}}{x-5}\times\frac{2+\sqrt{x-1}}{2+\sqrt{x-1}}=\lim_{x\to 5}\frac{4-(x-1)}{(x-5)(2+\sqrt{x-1})}$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{-(x-5)}{(x-5)(2+\sqrt{x-1})}=\frac{-1}{2+2}=\frac{-1}{4}$$

مثال: حد تابع $h(x)=\frac{x^2-8x}{\sqrt[3]{x}-2}$ را در $x=8$ در صورت وجود به دست آورید.

حل: هم حد صورت و هم حد مخرج در $x=8$ برابر صفرند. صورت و مخرج را در عبارت $\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4$ ضرب می‌کنیم تا مخرج کسر گویا شود.

$$\lim_{x\to 8} h(x)=\lim_{x\to 8}\frac{x^2-8x}{\sqrt[3]{x}-2}\times\frac{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}=\lim_{x\to 8}\frac{x(x-8)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{x-8}=8(4+4+4)=96$$

کار در کلاس

حدود زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 - 9}{x^2 + 3x}$

ب) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{4x^2 - 4x + 1}{2x^2 + x - 1}$

پ) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{4x^2 - 1}{4x^3 - 14x^2 + 24x - 9}$

ت) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 1}{x + \sqrt{2x + 3}}$

ث) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - \sqrt{x}}{x^2 + x - 2}$

ج) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\sqrt[3]{x} + 1}{x^2 + 3x + 2}$

حد نامتناهی

تابعی مثل f را در نظر بگیرید که در نزدیکی یک نقطهٔ مثل a، مقدارش از هر عدد دلخواه مثبتی بتواند بزرگ‌تر شود؛ به عبارت دیگر، در نقطهٔ a حد آن $+\infty$ شود. در اینجا، حدهایی از این نوع را بررسی می‌کنیم. ابتدا به چند تعریف نیاز داریم.

همسایگی: هر بازهٔ باز شامل عدد حقیقی x را یک همسایگی x می‌نامیم. به‌عبارت دیگر اگر $x \in (a , b)$ آنگاه بازهٔ (a , b) یک همسایگی x می‌باشد.

مثال: بازهٔ $(2 , 5)$ یک همسایگی ۳ است. آیا بازهٔ $(0 , 4)$ هم یک همسایگی برای ۳ محسوب می‌شود؟ شما دو همسایگی دیگر برای ۳ بنویسید و جواب خود را با پاسخ دوستانتان مقایسه کنید.

همسایگی محذوف: اگر بازهٔ (a , b) یک همسایگی عدد حقیقی x باشد، آنگاه مجموعهٔ $(a , b) - \{x\}$ یک همسایگی محذوف x نامیده می‌شود.

مثال: مجموعهٔ $(\frac{5}{2} , 4) - \{3\}$ یک همسایگی محذوف ۳ می‌باشد.

همسایگی چپ و راست: اگر r عددی مثبت باشد آنگاه $(a, a+r)$ یک همسایگی راست a نامیده می‌شود. همچنین، $(a-r, a)$ را یک همسایگی چپ a می‌نامیم.

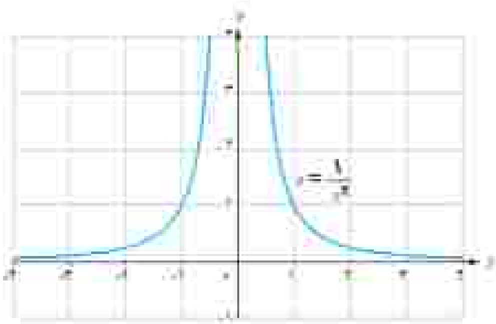
مثال: بازهٔ $(2, 3)$ یک همسایگی راست ۲ و بازهٔ $(\frac{3}{2}, 2)$ یک همسایگی چپ ۲ است. شما یک همسایگی راست دیگر برای ۲ و یک همسایگی چپ برای آن بنویسید.

فعالیت

می‌خواهیم مقدار $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}$ را در صورت وجود بدست آوریم. می‌دانیم تابع $f(x)=\frac{1}{x^2}$ در هر نقطهٔ غیرصفر تعریف شده است؛ یعنی $D_f=\mathbb{R}-\{0\}$. با تکمیل جدول زیر، به رفتار تابع f در یک همسایگی محذوف صفر توجه کنید.

x	$-0/2$	$-0/1$	$-0/01$	$-0/0001$	$\to 0 \leftarrow$	$0/0001$	$0/001$	$0/01$	$0/1$	$0/2$
$f(x)=\frac{1}{x^2}$	۲۵	۱۰۰	...	۱۰۰۰۰۰۰۰۰	$\to ? \leftarrow$	...	۱۰۰۰۰۰۰		...	۲۵

در جدول دیده می‌شود که وقتی x از سمت راست یا چپ به صفر نزدیک می‌شود، مقدار x^2 نیز به صفر نزدیک می‌شود. بنابراین مقادیر $\frac{1}{x^2}$، به هر اندازهٔ دلخواه بزرگ می‌شوند. در واقع با دقت در نمودار[1] تابع $y=\frac{1}{x^2}$ می‌توان نتیجه گرفت که هرگاه به اندازهٔ کافی x را به صفر نزدیک کنیم، خواهیم توانست مقادیر $f(x)$ را به هر اندازهٔ دلخواه بزرگ نماییم. بنابراین دیده می‌شود که مقدارهای بزرگ‌شوندهٔ $f(x)$ به هیچ عددی میل نمی‌کنند؛ در نتیجه $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}$ موجود نیست. با این حال، در چنین مواقعی برای توصیف بهتر رفتار تابع در همسایگی محذوف صفر، می‌نویسیم: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$.



تذکر: همچنان که از سال‌های قبل می‌دانیم، $+\infty$ یک عدد حقیقی نیست و رابطهٔ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$ صرفاً به حالت خاصی از عدم وجود حد اشاره دارد، به این معنا که $\frac{1}{x^2}$ را به هر اندازه که بخواهیم می‌توانیم بزرگ کنیم، مشروط بر آنکه x را به قدر کافی به صفر نزدیک کرده باشیم. این‌گونه حدها را حد نامتناهی یا حد بی‌نهایت می‌نامیم.

۱ــ رسم نمودار تابع‌های گویا جزو اهداف کتاب حاضر نمی‌باشد.

تعریف ۱ : فرض کنیم تابع f در یک همسایگی محذوف a تعریف شده باشد. رابطهٔ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ به این معناست که می‌توان مقدارهای $f(x)$ را از هر عدد مثبت دلخواه بزرگ‌تر کرد، مشروط بر آنکه x به قدر کافی به a نزدیک اختیار شود.

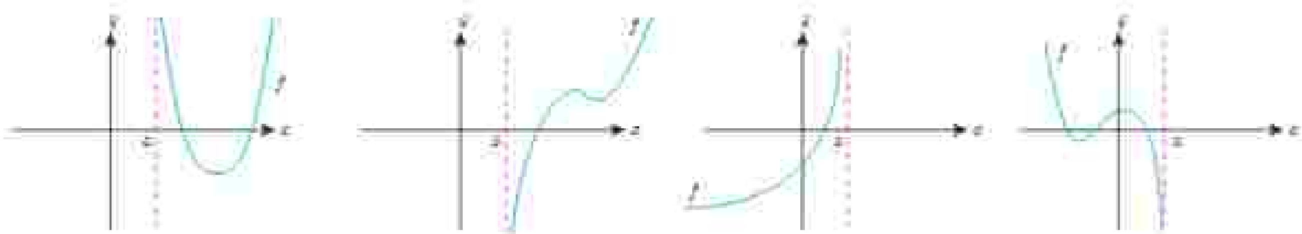
رابطهٔ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ نیز به روش مشابه تعریف می‌شود:

تعریف ۲ : فرض کنیم f در یک .... a تعریف شده باشد. رابطهٔ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ به این معناست که می‌توان مقادیر $f(x)$ را از هر عدد منفی دلخواهی .... کرد، مشروط بر آنکه x به قدر .... به a نزدیک اختیار شود.

حدهای یک طرفهٔ نامتناهی نیز به روش مشابهی تعریف می‌شوند. به عنوان نمونه تعریف $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ در زیر آمده است.

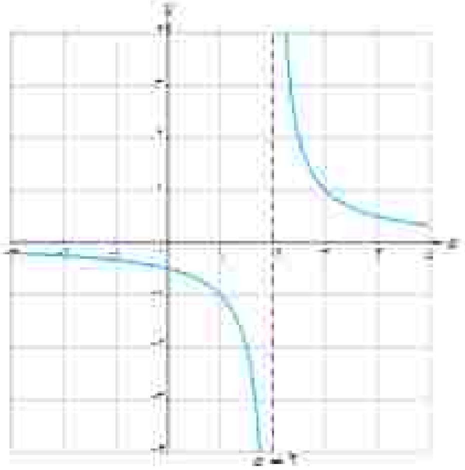
تعریف ۳ : فرض کنیم f در یک همسایگی راست از a تعریف شده باشد. رابطهٔ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ به این معناست که می‌توان مقادیر $f(x)$ را از هر عدد مثبت دلخواه بزرگ‌تر کرد، مشروط بر آنکه x با مقادیر بزرگ‌تر از a به قدر کافی به a نزدیک اختیار شود.

به نمودار مربوط به $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ و همچنین سایر حالت‌های حدود نامتناهی یک‌طرفه، در شکل‌های زیر دقت کنید.



$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$

مثال : حد چپ و راست تابع $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$ را در $x=2$ به دست آورید.



حل : نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$ رسم شده است. به مقادیر تابع در سمت راست و چپ $x=2$ دقت نمایید. وقتی $x\to 2^+$ در این حالت مخرج کسر یعنی $(x-2)$ عددی مثبت و کوچک نزدیک صفر خواهد بود. در نتیجه $\dfrac{1}{x-2}$ مثبت و بسیار بزرگ می‌شود که مقدار آن می‌تواند از هر عدد مثبت دلخواهی بزرگ‌تر شود. بنابراین همان‌طور که از نمودار هم دیده می‌شود، $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{x-2}=+\infty$.

به همین ترتیب وقتی $x\to 2^-$، مخرج کسر یعنی $(x-2)$ عددی منفی و بسیار نزدیک صفر خواهد بود. در نتیجه مقدار $\dfrac{1}{x-2}$ می‌تواند از هر عدد منفی دلخواه، کوچک‌تر شود، بنابراین $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{1}{x-2}=-\infty$. درستی این مطلب، از روی نمودار هم قابل مشاهده است.

در مورد حدهای نامتناهی قضیهٔ زیر بدون اثبات ارائه می‌شود.

قضیه : فرض کنیم $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L\neq 0$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ در این صورت :

الف) اگر $L>0$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a مثبت باشد، آنگاه $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=+\infty$

ب) اگر $L>0$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a منفی باشد، آنگاه $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=-\infty$

پ) اگر $L<0$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a مثبت باشد، آنگاه $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=-\infty$

ت) اگر $L<0$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a منفی باشد، آنگاه $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=+\infty$

تذکر : قضیهٔ قبل، برای حالتی که $x\to a^+$ و یا $x\to a^-$ نیز برقرار است.

مثال : حاصل $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{[x]-3}{|2x-1|}$ را محاسبه کنید.[1]

حل : مخرج در نزدیکی $\frac{1}{2}$ با مقادیر مثبت به صفر میل می‌کند و حد صورت هم در $\frac{1}{2}$ برابر -3 است.

پس بنابر قسمت (پ) قضیهٔ قبل داریم :

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}}\frac{[x]-3}{|2x-1|}=-\infty$$

---

۱. در اینجا حد آن دسته از توابع کسری مدنظر است که مخرج در حد صفر و صورت عدد غیرصفر باشد. بنابراین حالت‌هایی مثل $0\times\infty$ و $\infty-\infty$ مورد نظر نیستند که رعایت این مطلب در سؤالات ارزشیابی الزامی است.

کار در کلاس

۱ حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to 5^-} \dfrac{2x}{x-5}$ ب) $\lim\limits_{x\to 5^+} \dfrac{2x}{x-5}$

پ) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-1}{x^2}$ ت) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2}{|x-3|}$

ث) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}} \dfrac{[x]}{|3x+1|}$ ج) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+1}{\sin^2 x}$

۲ نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که در یک همسایگی محذوف -2 تعریف شده باشد به طوری که $\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x)=+\infty$. پاسخ خود را با جواب‌های دوستانتان مقایسه کنید.

تمرین

۱ الف) نشان دهید چندجمله‌ای $f(x)=2x^3+x^2+1$ بر دوجمله‌ای $x+1$ بخش‌پذیر است.

ب) به کمک تقسیم، $f(x)$ را به صورت حاصل‌ضرب عامل‌ها بنویسید.

۲ حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{2x^2-x}{4x^2-1}$ ب) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^3-4x^2-5x}{x^2-25}$ پ) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2+3x+2}{x^3+2x^2+x+2}$

۳ حدود زیر را در صورت وجود، به دست آورید.

الف) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-\sqrt{2x-1}}{x^2-x}$ ب) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{2-\sqrt{x+1}}$ پ) $\lim\limits_{x\to -8} \dfrac{2x+16}{\sqrt[3]{x}+2}$

۴ حدهای زیر را تعیین کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x}$ ب) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-1}{|x|}$ پ) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{x-1}$

ت) $\lim\limits_{x\to -6} \dfrac{9}{(x+6)^2}$ ث) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{-1}{(x-3)^2}$ ج) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}} \dfrac{2x+1}{(2x+1)^2}$

چ) $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{1-5x}{x^2-9}$ ح) $\lim\limits_{x\to(-2)^-} \dfrac{-3x}{x^2-4}$ خ) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \dfrac{1}{\cos x}$

د) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \tan x$ ذ) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \tan x$ ر) $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{[x]-3}{x-3}$

۵ الف) عبارت $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$ به چه معناست؟ توضیح دهید.

ب) عبارت $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=-\infty$ به چه معناست؟ توضیح دهید.

پ) نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که در هر دو شرط بالا صدق کند. مسئله چند جواب دارد؟

درس دوم

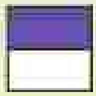
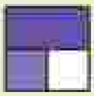
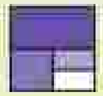
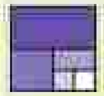
حد در بی‌نهایت

حد در بی‌نهایت

در درس قبل که حدهای نامتناهی را بررسی کردیم، دیدیم که وقتی x به سمت عددی مثل a نزدیک می‌شد، مقادیر y به $+\infty$ یا $-\infty$ میل می‌کرد. در اینجا x را به $+\infty$ یا $-\infty$ میل می‌دهیم و حد تابع را در صورت وجود به دست می‌آوریم.

فعالیت

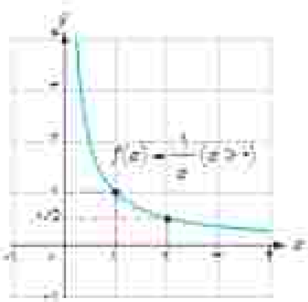
فرض کنید بخواهیم سطح مربعی به ضلع ۱ متر را طی فرایندی مطابق شکل‌های زیر رنگ کنیم. در مرحلهٔ اول، نصف سطح مربع را رنگ می‌کنیم. در مرحلهٔ دوم نصف قسمت‌های رنگ نشده را رنگ می‌زنیم و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم.

مرحله	۱	۲	۳	۴	...
شکل					...
سطح رنگ شده (متر مربع)	$\frac{۱}{۲}=۱-\frac{۱}{۲}$	$\frac{۳}{۴}=۱-\frac{۱}{۲^۲}$	$\frac{۷}{۸}=۱-\frac{۱}{۲^۳}$	...	...

الف) در مرحلهٔ دهم، چه سطحی از مربع رنگ شده است؟

ب) در مرحلهٔ nام، چه سطحی از مربع رنگ شده است؟

پ) اگر n به قدر کافی بزرگ اختیار شود، در مورد مساحت سطح رنگ شده در مرحلهٔ nام چه می‌توان گفت؟



مثال: تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ را در بازهٔ $(۰,+\infty)$ در نظر می‌گیریم. رفتار این تابع را به ازای برخی مقادیر مثبت x در جدول زیر مشاهده می‌کنید.

x	۱	۲	۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰	۱۰۰۰۰	...	$\to +\infty$
$f(x)=\frac{۱}{x}$	۱	۰/۵	۰/۱	۰/۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰۱	...	$\to ۰$

از جدول دیده می‌شود که با افزایش مقدار x، مقدار $\frac{1}{x}$ به صفر نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود. به عنوان مثال، برای آنکه فاصلهٔ $\frac{1}{x}$ تا صفر، کمتر از ۰/۰۰۰۰۱ باشد، لازم است x بزرگ‌تر از ۱۰۰۰۰۰ انتخاب شود. به نظر شما، آیا به هر میزان که بخواهیم، می‌توانیم مقدار $\frac{1}{x}$ را به صفر نزدیک کنیم؟ آیا مقداری از x وجود دارد که به ازای آن، فاصلهٔ $\frac{1}{x}$ تا صفر کمتر از ۰/۰۰۰۰۰۱ باشد؟

با این شرایط می‌گوییم حد تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ در $+\infty$ برابر صفر است و می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$. به‌طور کلی می‌توان گفت:

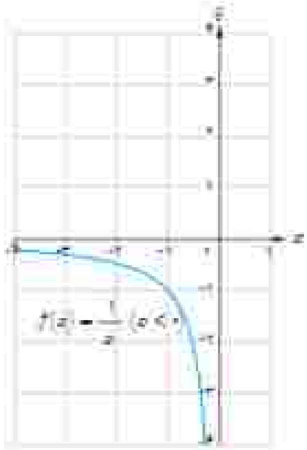
> اگر تابع f در بازه‌ای مثل $(a,+\infty)$ تعریف شده باشد، رابطهٔ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=L$ به این معناست که $f(x)$ را به هر مقدار دلخواه می‌توان به L نزدیک کرد، مشروط بر آنکه x به قدر کافی بزرگ اختیار شود.

رابطهٔ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=L$ نیز به روش مشابه تعریف می‌شود:

> فرض کنیم تابع f در بازه‌ای مثل $(-\infty,b)$ تعریف شده باشد. رابطهٔ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=L$ به این معناست که به هر مقدار .... می‌توان $f(x)$ را به L نزدیک کرد، مشروط بر آنکه x به قدر .... کوچک و منفی اختیار شود.

مثال: با توجه به جدول زیر و با ملاحظهٔ نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ که در بازهٔ $(-\infty,0)$ رسم شده است، دیده می‌شود که $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$.

x	$-\infty \leftarrow$	...	-1000000	-100000	-1000	-100
$f(x)=\frac{1}{x}$	$? \leftarrow$	...	$-0/000001$	...	...	$-0/01$



در مورد حدهای نامتناهی، دو قضیهٔ زیر مفیدند.

قضیه ۱ : فرض کنیم n عددی طبیعی باشد. در این صورت :

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n}=0$ ب) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n}=0$.

قضیه ۲ : فرض کنیم $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=m$ ، در این صورت :

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)\pm g(x))=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\pm \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=l\pm m$

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x).g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\times \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=l.m$

پ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)}{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)}=\frac{l}{m}\quad (m\neq 0)$

تذکر : قضیهٔ ۲ برای وقتی که $x\to-\infty$ نیز برقرار است.

مثال : مقدار $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{7x^2-4x+1}{3x^2+5x-6}$ را به دست آورید.

حل : برای محاسبهٔ این حد، ابتدا باید صورت و مخرج را بر بزرگ‌ترین توانی از x که در مخرج وجود دارد، یعنی x^2 تقسیم کنیم (چون $x\to+\infty$، پس می‌توان نتیجه گرفت که $x^2\neq 0$).

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{7x^2-4x+1}{3x^2+5x-6}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{7x^2-4x+1}{x^2}}{\frac{3x^2+5x-6}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{7-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}{3+\frac{5}{x}-\frac{6}{x^2}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}(7-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2})}{\lim\limits_{x\to+\infty}(3+\frac{5}{x}-\frac{6}{x^2})}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}7-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4}{x}+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x\to+\infty}3+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5}{x}-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6}{x^2}}=\frac{7-0+0}{3+0-0}=\frac{7}{3}$$

کار در کلاس

۱) مقدار حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x+2}{x+1}$ ب) $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{1-5t^2}{t^2+3t}$ پ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{2-3x}$

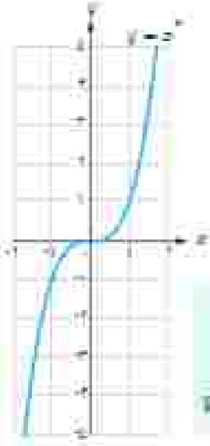
۲) الف) تابعی مثال بزنید که حد آن در $+\infty$ برابر (-1) باشد. پاسخ خود را با جواب‌های دوستانتان مقایسه کنید.

ب) تابعی مثال بزنید که حد آن در $-\infty$ برابر ۱۰۰ باشد. پاسخ خود را با جواب‌های دوستانتان مقایسه کنید.

حد نامتناهی در بی‌نهایت

برخی توابع مانند f هستند که وقتی $x \to +\infty$ یا $x \to -\infty$، مقدار آنها یعنی $f(x)$ می‌تواند به هر اندازهٔ دلخواه بزرگ (یا کوچک منفی) شود. در این بخش رفتار این‌گونه تابع‌ها را در $+\infty$ یا $-\infty$ مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

مثال: تابع $f(x)=x^3$ را در نظر بگیرید.



x	$-\infty \leftarrow$	-۱۰۰۰	-۱۰۰	-۱۰	۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰	$\to +\infty$
$y=x^3$	$-\infty \leftarrow$	-۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰	-۱۰۰۰۰۰۰	-۱۰۰۰	۱۰۰۰	۱۰۰۰۰۰۰	۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰	$\to +\infty$

جدول بالا و همچنین نمودار تابع نشان می‌دهند که با افزایش مقدار x، مقدار x^3 هم افزایش می‌یابد به طوری که با بزرگ کردن x به قدر کافی، می‌توان مقدار x^3 را از هر عدد مثبت دلخواهی بزرگ‌تر کرد. در این حالت می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$. در حالت کلی داریم:

> **تعریف:** فرض کنیم تابع f در بازه‌ای مثل $(a, +\infty)$ تعریف شده باشد. رابطهٔ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ به این معناست که مقدارهای $f(x)$ را می‌توان از هر عدد مثبت دلخواهی بزرگ‌تر کرد، مشروط بر آنکه x به قدر کافی بزرگ اختیار شود.

به روش مشابه از جدول و نمودار بالا دیده می‌شود که با منفی و کوچک گرفتن x به قدر کافی، می‌توان مقدار x^3 را از هر عدد منفی دلخواهی کوچک‌تر کرد. در این حالت می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$. در حالت کلی می‌توان گفت:

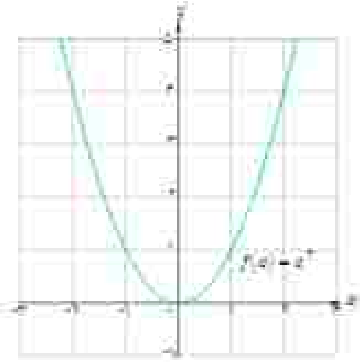
> **تعریف:** فرض کنیم تابع f در بازه‌ای مثل $(-\infty, b)$ تعریف شده باشد. رابطهٔ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ به این معناست که مقدارهای $f(x)$ را می‌توان از هر عدد منفی دلخواهی کوچک‌تر کرد، مشروط بر آنکه x به قدر کافی کوچک و منفی اختیار شود.

تذکر ۱: رابطه‌های $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ نیز به روش مشابه تعریف می‌شوند.

تذکر ۲: رابطه‌هایی مانند $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ را حد نامتناهی در بی‌نهایت می‌نامیم. همچنان که قبلاً بیان شد، این دو مورد، صورت‌هایی از عدم وجود حد تابع f در $+\infty$ هستند؛ چرا که $+\infty$ و $-\infty$ عدد حقیقی نیستند که بیانگر حد تابع f در $+\infty$ باشند.

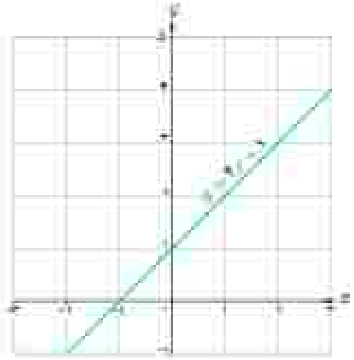
کار در کلاس

با توجه به نمودار هر تابع، طرف دوم تساوی‌ها را بنویسید.



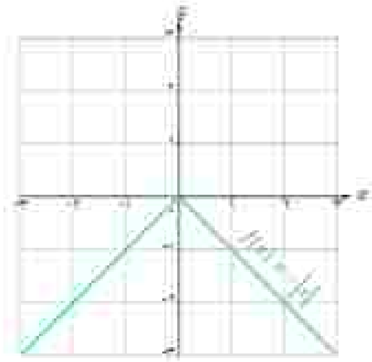
الف) $\lim\limits_{x\to -\infty} x^2 = \cdots$

$\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 = \cdots$



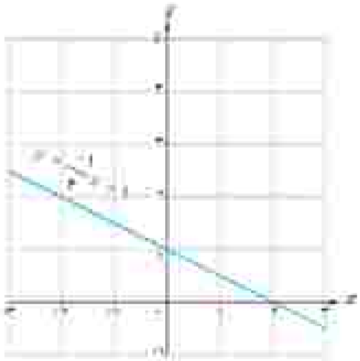
ب) $\lim\limits_{x\to -\infty} (2x+1) = \cdots$

$\lim\limits_{x\to +\infty} (2x+1) = \cdots$



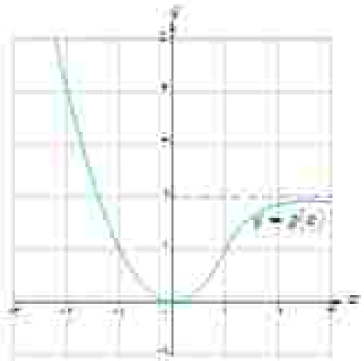
پ) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \cdots$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \cdots$



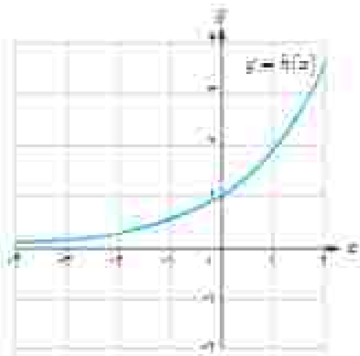
ت) $\lim\limits_{x\to -\infty} (\frac{-1}{2}x+1) = \cdots$

$\lim\limits_{x\to +\infty} (\frac{-1}{2}x+1) = \cdots$



ث) $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x) = \cdots$

$\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = \cdots$



ج) $\lim\limits_{x\to -\infty} h(x) = \cdots$

$\lim\limits_{x\to +\infty} h(x) = \cdots$

از قضیهٔ زیر برای محاسبهٔ حد تابع یک جمله‌ای $f(x)=ax^n$ در $+\infty$ و $-\infty$ استفاده می‌کنیم.

قضیه: فرض کنیم n عددی طبیعی و a یک عدد حقیقی غیرصفر باشد.

الف) $\lim\limits_{x\to +\infty} ax^n = \begin{cases} +\infty & (a \text{ مثبت}) \\ -\infty & (a \text{ منفی}) \end{cases}$

ب) $\lim\limits_{x\to -\infty} ax^n = \begin{cases} +\infty & (n \text{ زوج و } a \text{ مثبت}) \\ -\infty & (n \text{ زوج و } a \text{ منفی}) \\ -\infty & (n \text{ فرد و } a \text{ مثبت}) \\ +\infty & (n \text{ فرد و } a \text{ منفی}) \end{cases}$

مثال: حدود زیر را محاسبه کنید:

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-3+5x^2)$ ب) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x^3+4x^2-5x-9)$

حل:

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-3+5x^2)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}+5\right)$

بنابر قضیه‌ای از درس قبل، حد $\frac{2}{x}$ و $\frac{3}{x^2}$ در $+\infty$ برابر صفرند؛ بنابراین:

$$\lim_{x\to+\infty}x^2\left(\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}+5\right)=\lim_{x\to+\infty}x^2(0-0+5)=\lim_{x\to+\infty}5x^2=+\infty$$

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x^3+4x^2-5x-9)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3\left(-2+\frac{4}{x}-\frac{5}{x^2}-\frac{9}{x^3}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3(-2+0)$

$$=\lim_{x\to-\infty}(-2x^3)=+\infty$$

در هر دو قسمت مثال قبل دیده می‌شود که حد یک تابع چندجمله‌ای مثل f در $+\infty$ یا $-\infty$ برابر است با حد جملهٔ با بزرگ‌ترین توان f در $+\infty$ یا $-\infty$. این مطلب در حالت کلی درست است و می‌توان به روش مثال بالا آن را اثبات کرد یعنی:

فرض کنیم f یک تابع چندجمله‌ای از درجهٔ n به‌صورت $f(x)=ax^n+bx^{n-1}+\cdots+k$ باشد که در آن n عددی طبیعی و a یک عدد حقیقی غیرصفر است. در این صورت:

$$\lim_{x\to+\infty}(ax^n+bx^{n-1}+\dots+k)=\lim_{x\to+\infty}ax^n \quad , \quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}ax^n$$

از این مطلب می‌توان برای محاسبهٔ حد توابع گویا، زمانی که $x\to+\infty$ یا $x\to-\infty$ نیز استفاده کرد. به مثال زیر دقت کنید.

مثال: $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-12x^5+7x^3-2x-9}{3x^2-8x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-12x^5}{3x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}(-4x^3)=+\infty$

کار در کلاس

حدود زیر را محاسبه کنید:

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^3-5x+4}{7x^3-11x^2-6x}$ ب) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5x+4}{x^2+x-8}$ پ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-4x^2+5x^3}{2x^3+9}$

تمرین

۱ نمودار هر یک از تابع‌های زیر را رسم کنید و سپس حدود خواسته شده را به دست آورید.

الف) $f(x)=\frac{1}{x}$: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to0}f(x)$

ب) $g(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0\end{cases}$: $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$

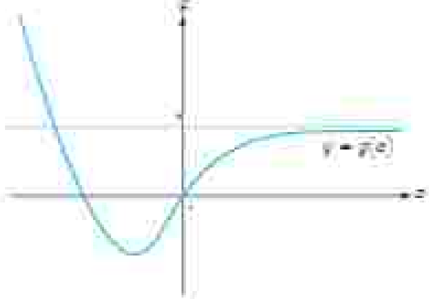
۲ با توجه به نمودار توابع، حدود خواسته شده را بنویسید.

(الف)

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\cdots$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\cdots$

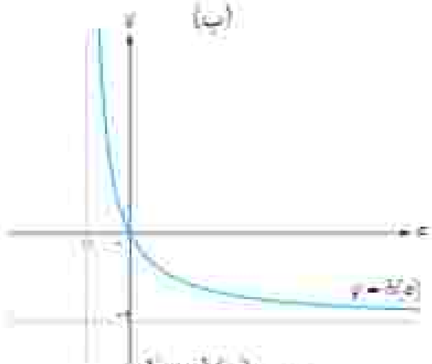
(ب)



$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\cdots$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\cdots$

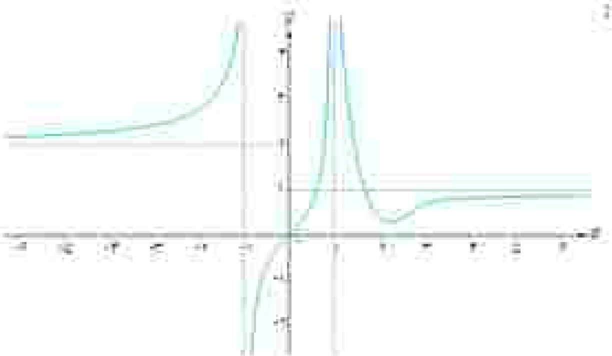
(پ)



$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\cdots$

$\lim\limits_{x\to(-1)^+} h(x)=\cdots$

۳ نمودار تابع f به شکل مقابل است. حدود خواسته شده را بنویسید:



الف) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

ب) $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)$

پ) $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)$

ت) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

ث) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

ج) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

۴ حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(9+\dfrac{7}{x^2}\right)$

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{2}x^3+7x^2-6\right)$

پ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{2x-3}$

ت) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3+\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{2}{x}-5}$

ث) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-1}{3x+1}$

ج) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2-3x+1}{x^2+5x-3}$

چ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^5-6x^3-x}{x^2-5x+1}$

ح) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+x}{3-x}$

خ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-6x^3+7x-9}{2x^3-4x^2+x}$

د) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+1}{4}$

۵ الف) هر یک از رابطه‌های $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-1$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$ به چه معنا هستند؟ توضیح دهید.

ب) نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که هر دو ویژگی الف را داشته باشد. مسئله چند جواب دارد؟

فصل ۴

مشتق

ماهواره‌بر سیمرغ ـ پایگاه فضایی امام خمینی (ره)

مفهوم مشتق به مسئله تاریخی خط مماس در یک نقطه از منحنی و مسئله یافتن سرعت لحظه‌ای یک جسم مربوط می‌شود. امروزه مشتق در علوم مختلف کاربردهای وسیع و گسترده‌ای دارد. به‌طور مثال در صنایع فضایی، مسائلی نظیر کمینه‌سازی سوخت مصرفی، بیشینه‌سازی سرعت و کمینه‌سازی زمان سفر با مفهوم مشتق ارتباط دارند.

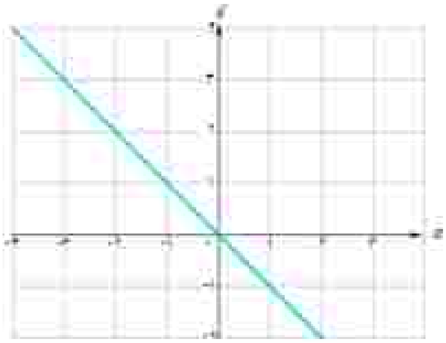
درس اول

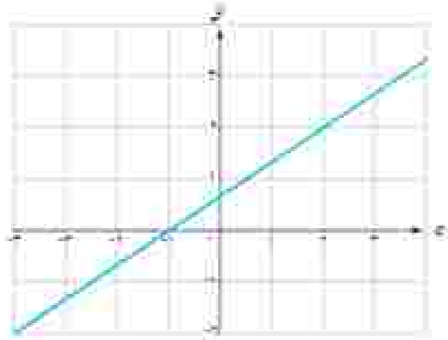
آشنایی با مفهوم مشتق

مشتق یکی از مفاهیم اساسی ریاضی است که دارای کاربردهای وسیع در ریاضیات و علوم دیگر است. ایده اولیه در مورد مفهوم مشتق، به شیب یک خط مربوط می‌شود. به کمک این ایده به تدریج به‌صورت دقیق‌تری با مفهوم مشتق آشنا می‌شویم.

فعالیت

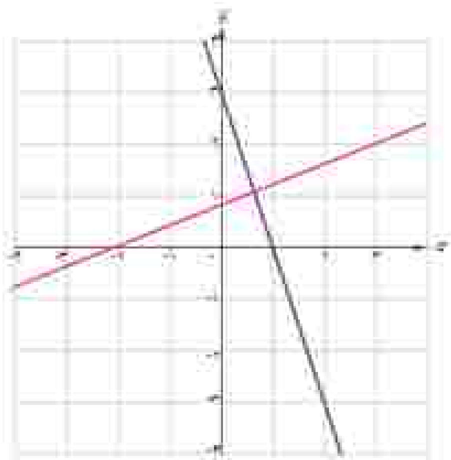
۱ شیب هر یک از خط‌های داده شده را به‌دست آورید و مشخص کنید که کدام یک مثبت و کدام یک منفی است؟

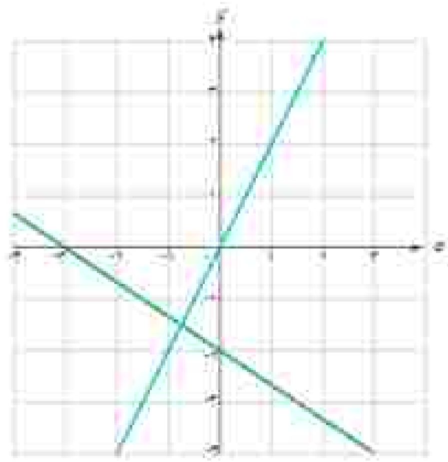




۲ با توجه به جدول روبه‌رو، نمودار مربوط خط‌های L_1، L_2، L_3 و L_4 را روی شکل مشخص کنید.

خط	L_1	L_2	L_3	L_4
شیب	$-\frac{2}{3}$	2	-2	$\frac{2}{5}$

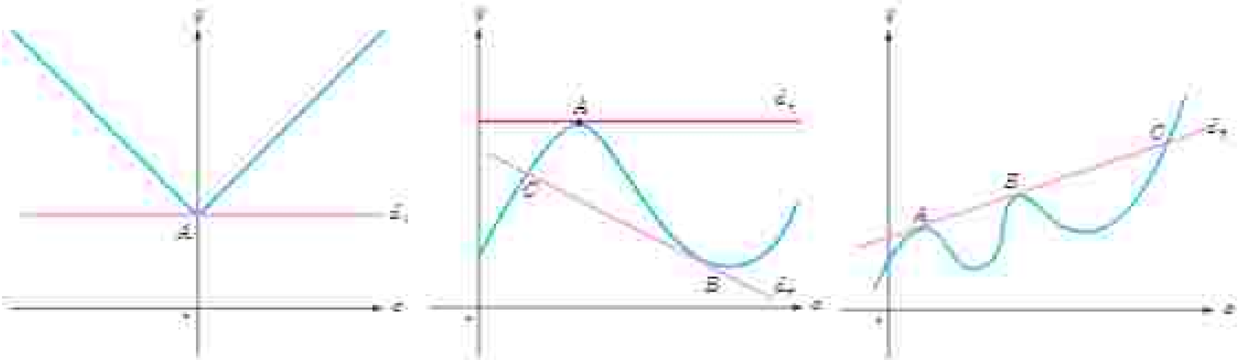




خط مماس بر یک منحنی

یافتن خط مماس در یک نقطه از یک منحنی مسئله‌ای تاریخی است که زمانی طولانی برای حل آن صرف شده است. مفهوم خط مماس بر یک دایره از زمان‌های گذشته مشخص بوده است. خط مماس بر دایره، خطی است که با دایره یک و فقط یک نقطه مشترک داشته باشد. این تعریف در حالت کلی برای همه منحنی‌ها صادق نیست.

خط‌های L_1 تا L_4 را در نظر بگیرید. خط L_1 در نقطه A، خط L_2 در نقطه B و خط L_3 در نقاط A و B بر منحنی مماس هستند. خط L_4 در نقطه A بر منحنی مماس نیست. همچنین خطوط L_2 و L_3 در نقطه C بر منحنی مماس نیستند. در ادامه این درس با دلایل این امر به صورت دقیق‌تری آشنا خواهید شد.



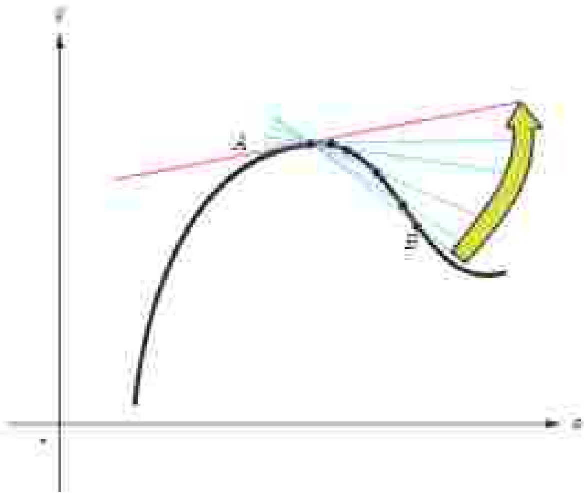
خواندنی

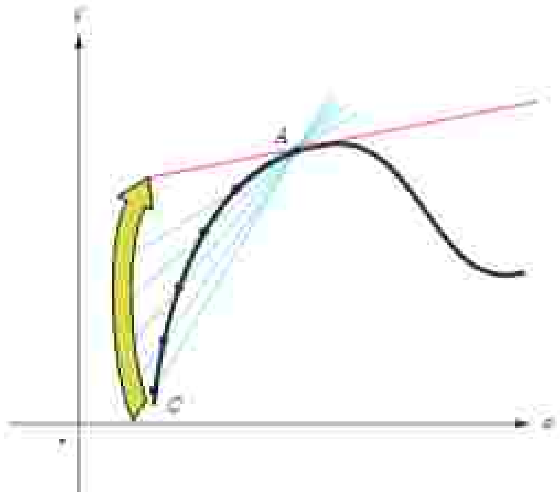
از نظر تاریخی مسئله یافتن خط مماس در یک نقطه از یک منحنی، برای اولین بار در اوایل قرن هفدهم میلادی زمانی مطرح شد که فرما ریاضی‌دان فرانسوی اقدام به تعیین ماکزیمم‌ها و مینیمم‌های چند تابع خاص کرد. فرما دریافت که خطوط مماس، در نقاطی که منحنی ماکزیمم یا مینیمم دارد، باید افقی باشند. از این رو به نظرش رسید که مسئله تعیین نقاط ماکزیمم یا مینیمم به حل مسئله دیگر، یعنی یافتن مماس‌های افقی مربوط می‌شود. تلاش برای حل این مسئله کلی‌تر بود که فرما را به کشف برخی از ایده‌های مقدماتی مفهوم «مشتق» هدایت کرد. مفهوم مشتق به شکل امروزی آن توسط نیوتن و به فاصله چند سال بعد از او توسط لایب‌نیتس، مستقل از یکدیگر پدید آمد. شیوه نیوتن مبتنی بر دیدگاه فیزیکی بود و از مشتق برای به دست آوردن سرعت لحظه‌ای استفاده کرد، اما لایب‌نیتس با دیدگاهی هندسی از مشتق برای به دست آوردن شیب خط مماس در منحنی‌ها استفاده کرد.

اکنون سعی می‌کنیم که به کمک نمودار منحنی، خط مماس بر منحنی در یک نقطه را بررسی کنیم. نقطهٔ ثابت A را روی منحنی زیر در نظر می‌گیریم. خطی که از A و B می‌گذرد یک خط قاطع نامیده می‌شود. روی منحنی نقطه‌های دیگری را نزدیک‌تر به نقطهٔ A اختیار می‌کنیم و خط‌های گذرنده از A و آن نقطه‌ها را رسم می‌کنیم. حدس بزنید که وقتی نقاط به قدر کافی به A نزدیک می‌شوند، برای خط‌های قاطع چه اتفاقی می‌افتد؟ به‌عبارت دیگر خط‌های قاطع به چه خطی نزدیک می‌شوند؟

اکنون نقطهٔ C را سمت چپ نقطهٔ A اختیار می‌کنیم و خط قاطع AC را رسم می‌کنیم. مانند قبل نقاط دیگری را نزدیک‌تر به نقطهٔ A اختیار می‌کنیم. حدس می‌زنید برای خط‌های قاطع چه اتفاقی می‌افتد؟ به‌طور شهودی می‌توان گفت:

شیب خط مماس بر منحنی در نقطهٔ A حد شیب خط‌های قاطع گذرنده از A است به شرطی که نقطه‌ها به قدر کافی به A نزدیک شوند.





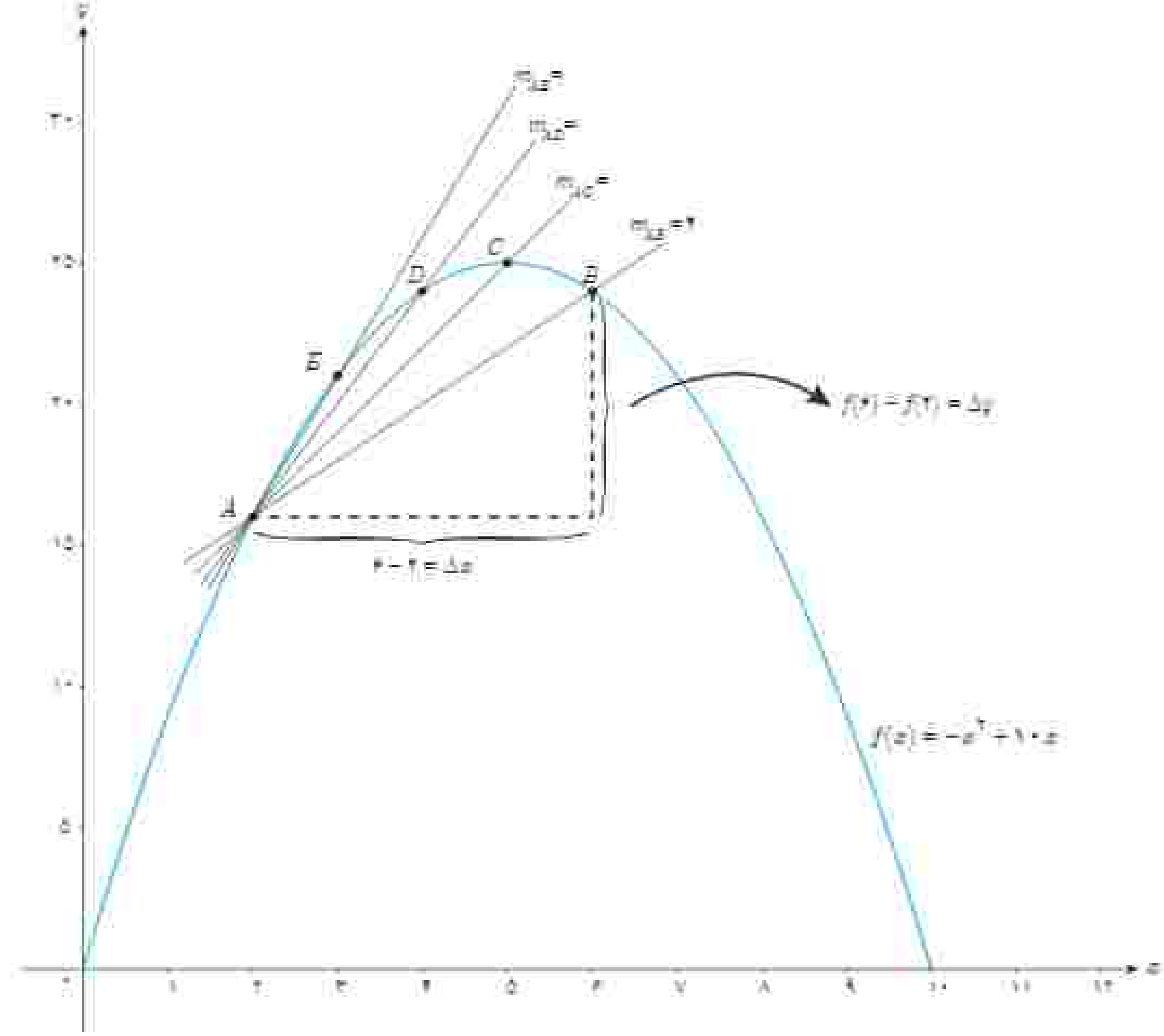
در ادامه این بحث را دقیق‌تر بررسی خواهیم کرد.

فعالیت

الف) تابع $f(x) = -x^2+10x$ داده شده است. اگر $0 \leq x \leq 10$، نقاط $A(2,f(2))$، $B(6,f(6))$، $C(5,f(5))$، $D(4,f(4))$ و $E(3,f(3))$ را روی منحنی در نظر می‌گیریم. شیب خطی که از نقاط A و B می‌گذرد یعنی m_{AB} از دستور زیر به‌دست می‌آید:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{f(6)-f(2)}{6-2} = \frac{24-16}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

به همین روش m_{AC} و m_{AD} و m_{AE} را به‌دست آورید.



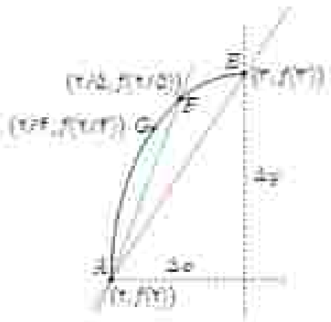
همان‌طور که می‌دانید برای محاسبهٔ شیب خط AB نسبت تغییر عمودی را به تغییر افقی به‌دست می‌آوریم. اگر این تغییرات را به ترتیب با Δy و Δx نمایش دهیم، داریم:

$$m_{AB}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

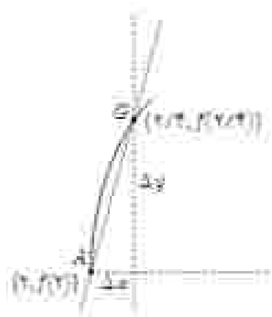
در هنگام محاسبه شیب‌های بالا، توضیح دهید که Δxها چگونه تغییر می‌کنند؟

[۲,۶]	۲ ______________ ۶	$\Delta x=۶-۲=۴$	$\Delta y=۲۴-۱۶=۸$
[۲,۵]	۲ ___________ ۵	$\Delta x=۵-۲=۳$	$\Delta y=۲۵-۱۶=۹$
[۲,۴]	۲ _______ ۴	$\Delta x=۴-۲=۲$	$\Delta y=۲۴-۱۶=۸$
[۲,۳]	۲ ___ ۳	$\Delta x=۳-۲=۱$	$\Delta y=۲۱-۱۶=۵$

ب) حال فرض کنید که با ادامهٔ روندی که در قسمت (الف) اختیار کردیم، نقاط بیشتری را نزدیک به A انتخاب کنیم. شیب خطوط به‌دست آمده به شیب خط مماس بر منحنی در نقطهٔ A نزدیک می‌شود. برای درک بهتر این موضوع، منحنی $f(x)=-x^2+10x$ در فاصلهٔ [۲,۳] رسم شده است. در ادامه نمودار تابع در بازهٔ [۲,۲/۴] رسم شده است.



$$m_{AF}=\frac{f(2.5)-f(2)}{2.5-2}=\frac{18.75-16}{0.5}=\frac{2.75}{0.5}=5.5$$



$$m_{AG}=\frac{f(2.4)-f(\ \ )}{2.4-\ \ }=\frac{\qquad}{\qquad}=$$

اگر به همین ترتیب بازه‌های کوچک‌تری در نظر بگیریم، شیب خطوط به‌دست آمده به شیب خط مماس بر منحنی در نقطهٔ A نزدیک می‌شود. برای درک بهتر این موضوع، با تکمیل جدول و مقایسه شیب خط‌های قاطع، شیب خط مماس را حدس بزنید.

بازهٔ $[a,b]$	شیب خطی که از نقاط $(a,f(a))$ و $(b,f(b))$ می‌گذرد. $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
[۲,۲/۴]	$\frac{f(2.4)-f(\ \ )}{2.4-\ \ }=\frac{\qquad}{\qquad}=\frac{\qquad}{\qquad}=5.6$
[۲,۲/۳]	$\frac{\qquad}{\qquad}=\frac{\qquad}{\qquad}=\frac{\qquad}{\qquad}=$
[۲,۲/۲]	$\frac{f(2.2)-f(2)}{2.2-2}=\frac{17.16-16}{0.2}=\frac{1.16}{0.2}=5.8$
[۲,۲/۱]	$\frac{f(2.1)-f(2)}{2.1-2}=\frac{16.59-16}{0.1}=\frac{0.59}{0.1}=5.9$
[۲,۲/۰۱]	$\frac{f(2.01)-f(2)}{2.01-2}=\frac{16.0599-16}{0.01}=\frac{0.0599}{0.01}=5.99$
[۲,۲/۰۰۱]	$\frac{f(2.001)-f(2)}{2.001-2}=\frac{16.005999-16}{0.001}=5.999$
⋮	⋮ ⋮
[۲,۲+h] (h یک عدد خیلی کوچک و مثبت است.)	$\frac{f(2+h)-f(2)}{h}\longrightarrow ?$

اگر بخواهیم دقیق‌تر صحبت کنیم، باید در مورد مقادیر عبارت $\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ وقتی h به قدر کافی نزدیک به صفر (و مثبت) است، بررسی کنیم. روند بالا این حدس را تقویت می‌کند که هر چقدر که بخواهیم می‌توانیم این مقادیر را به عدد ۶ نزدیک کنیم مشروط بر آنکه h را به قدر کافی نزدیک به صفر (و مثبت) اختیار کنیم. به عبارت دیگر حدس می‌زنیم که: $\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=6$
کافی است با محاسبهٔ مقدار حد، صحت حدس خود را بررسی کنیم:

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{-(2+h)^2+10(2+h)-16}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{-(h^2+4h+4)+20+10h-16}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{-h^2-4h-\cancel{4}+\cancel{4}+10h}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{-h^2+6h}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h(-h+6)}{h}=\lim_{h\to 0^+}(-h+6)=6$$

به طریق مشابه می‌توان دید که اگر نقاط روی منحنی را در سمت چپ A اختیار کنیم، به عبارت دیگر اگر بازه‌هایی مانند $[1/5, 2]$، $[1/6, 2]$، $[1/7, 2]$، $[1/8, 2]$ و ... را در نظر بگیریم شیب خط‌های قاطع برابر با $6/5$، $6/4$، $6/3$، $6/2$، ... خواهد شد. به عبارت دیگر در این حالت هم شیب خط‌های قاطع به هر اندازه که بخواهیم به عدد ۶ نزدیک می‌شوند، مشروط بر آنکه h به قدر کافی از سمت چپ به صفر نزدیک شود، یعنی داریم: $\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=6$

بنابراین به طور کلی می‌توان نوشت: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=6$

شیب خط مماس بر منحنی تابع f در نقطهٔ $A(a, f(a))$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\text{شیب خط مماس بر منحنی در نقطهٔ } A=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

به شرط آنکه این حد موجود و متناهی باشد.
حد بالا را (در صورت وجود) مشتق تابع f در نقطهٔ a می‌نامند و با $f'(a)$ نمایش می‌دهند، یعنی:

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

حد مذکور را شیب منحنی در a نیز می‌نامند.

بنابراین در مثال قبل داریم $f'(۲)=۶$. در ادامه $f'(۳)$ برای $f(x)=-x^{۲}+۱۰x$ محاسبه شده است :

$$f'(۳)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۳+h)-f(۳)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{-(۳+h)^{۲}+۱۰(۳+h)-۲۱}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{-۹-۶h-h^{۲}+۳۰+۱۰h-۲۱}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{-h^{۲}+۴h}{h}=\lim_{h\to ۰}(-h+۴)=۴$$

مثال : معادله خط مماس بر منحنی تابع $f(x)=-x^{۲}+۱۰x$ را در نقطه $A(۲,f(۲))$ واقع بر نمودار تابع بنویسید.

حل : با توجه به آنچه که در فعالیت قبل مشاهده شد : $f'(۲)=۶$ = شیب خط مماس در نقطه A

$A(۲,f(۲))=(۲,۱۶)$

$y-۱۶=۶(x-۲)\Rightarrow y=۶x+۴$

کار در کلاس

معادله خط مماس بر منحنی تابع $y=x^{۲}+۳$ را در نقطه‌ای به طول ۲− بنویسید.

تذکر : با نمادهای معرفی شده در فعالیت در مورد شیب خط‌های قاطع می‌توان دستورهای معادل دیگری برای محاسبه مشتق در یک نقطه بدست آورد، بطور مثال شیب خطی که از نقاط A و B می‌گذرد برابر است با :

$$m_{AB}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

و از آنجا :

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

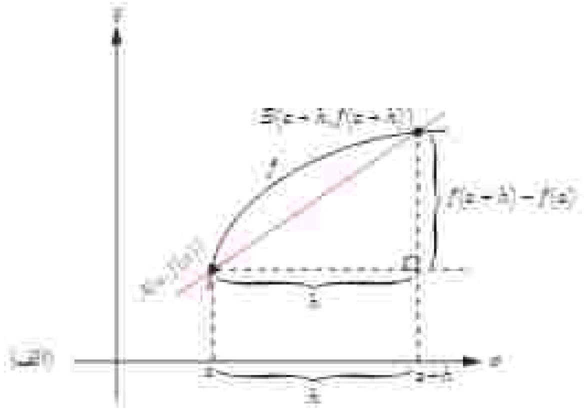
مثال : اگر $f(x)=-x^{۲}+۱۰x$، $f'(۲)$ را از دستور بالا بدست آورید :

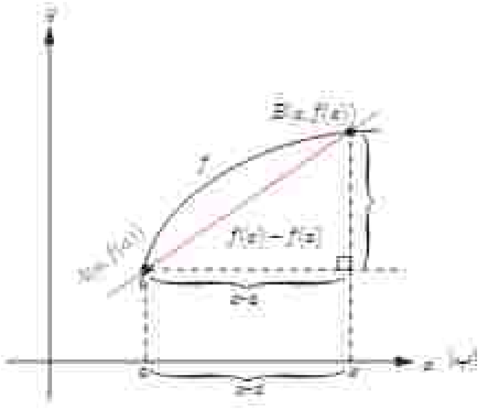
$$f'(۲)=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{f(۲+\Delta x)-f(۲)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{-(۲+\Delta x)^{۲}+۱۰(۲+\Delta x)-۱۶}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{-\cancel{۴}-\Delta x^{۲}-۴\Delta x+\cancel{۲۰}+۱۰\Delta x-\cancel{۱۶}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{-\Delta x^{۲}+۶\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{\Delta x(-\Delta x+۶)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to ۰}(-\Delta x+۶)=۶$$

محاسبه $f'(a)$ به روش دیگر

مشتق تابع f در نقطه $x=a$ بصورت : $f'(a)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ تعریف شد. اکنون دستور دیگری برای مشتق تابع f در نقطه $x=a$ می‌یابیم که در برخی محاسبات کار را ساده‌تر می‌کند.





با استفاده از نموداری مشابه نمودار (الف) برای محاسبه مشتق f در a داریم :

$$AB \text{ شیب خط } = m_{AB} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$A \text{ شیب خط مماس بر منحنی در } = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

با استفاده از نمودار (ب) راه دیگر محاسبه شیب خط مماس این است که نقطه دلخواه B را به مختصات $(x,f(x))$ در نظر بگیریم در این صورت داریم :

$$AB \text{ شیب خط } = m_{AB} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

برای محاسبه شیب خط مماس کافی است که x را مرتباً به a نزدیک کنیم. در این صورت شیب خط مماس برابر با $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ است مشروط بر اینکه این حد موجود باشد (واضح است که مانند قبل x باید از راست و چپ به قدر کافی به a نزدیک شود). به عبارت دیگر : $f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

مثال : اگر $f(x)=x^2$ ، $f'(3)$ را به دو روش به‌دست آورید.

حل :

روش اول :

$$f'(3)=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(h+3)^2-9}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+6h+9-9}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+6h}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(h+6)}{h}=\lim_{h\to 0}(h+6)=6$$

روش دوم :

$$f'(3)=\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x+3)=6$$

در موقعیت‌های مختلف، ممکن است یکی از این دو روش بر دیگری به دلیل ساده‌تر بودن محاسبات برتری داشته باشد.

کار در کلاس

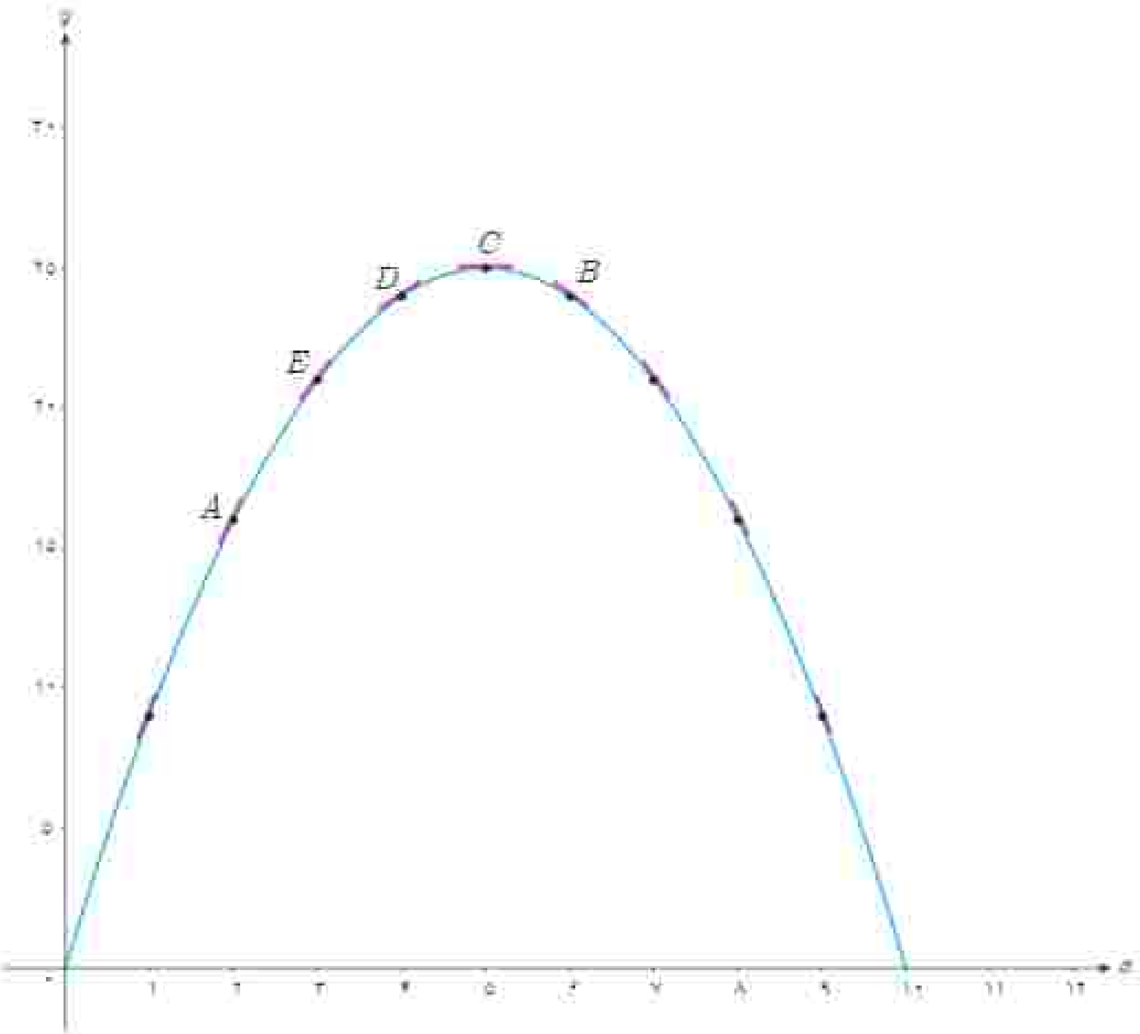
الف) برای تابع $f(x)=-x^2+10x$، $f'(8)$ و $f'(5)$ را حساب کنید.

ب) دو نقطه روی منحنی مشخص کنید که مقدار مشتق تابع در آنها قرینه یکدیگر باشد.

پ) به کمک شکل توضیح دهید که تابع در چه نقاطی دارای مشتق مثبت و در چه نقاطی مشتق منفی است.

ت) بدون محاسبه و تنها به کمک نمودار، شیب خط‌های مماس بر منحنی در نقاط ۲ و ۴ را با هم مقایسه کنید.

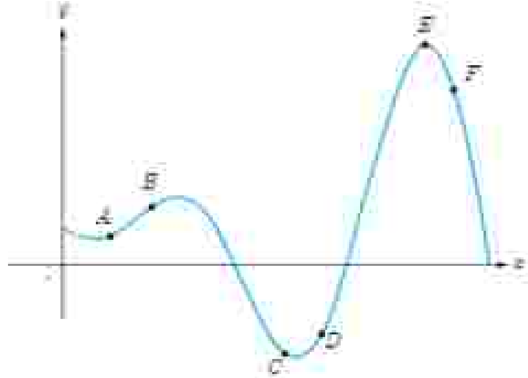
ث) با محاسبه $f'(2)$ و $f'(4)$ صحت حدس خود را بررسی نمایید.



تمرین

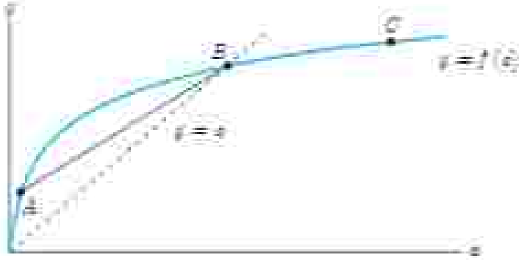
۱. اگر $f(x)=3x^2-2x+1$، $f'(2)$ را به‌دست آورید و معادله خط مماس بر منحنی f را در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن بنویسید.

۲. نقاط داده شده روی منحنی زیر را با شیب‌های ارائه شده در جدول نظیر کنید.



نقطه	شیب
	-3
	-1
	0
	$\frac{1}{2}$
	1
	2

۳. برای نمودار $y=f(x)$ در شکل زیر شیب‌های داده شده از «الف» تا «ج» را از کوچک‌ترین به بزرگ‌ترین مرتب کنید.



الف) شیب نمودار در نقطه A

ب) شیب نمودار در نقطه B

پ) شیب نمودار در نقطه C

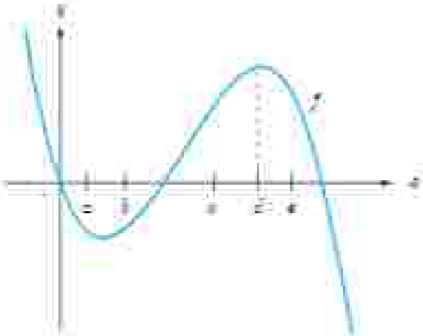
ت) شیب خط AB

ث) شیب خط $y=2$

ج) شیب خط $y=x$

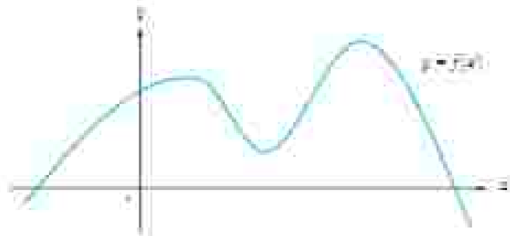
شیب‌های داده شده از «الف» تا «ج» را به ترتیب m_1 ، m_2 ، … و m_6 در نظر بگیرید.

۴. با در نظر گرفتن نمودار f در شکل، نقاط به طول‌های a، b، c، d و e را با مشتق‌های داده شده در جدول نظیر کنید.



$f'(x)$	x
0	
$0/5$	
2	
$-0/5$	
-2	

۵ نقاطی مانند A، B، C، D، E، F و G را روی نمودار $y=f(x)$ مشخص کنید به طوری که:



الف) A، نقطه‌ای روی نمودار است که شیب خط مماس بر نمودار در آن منفی است.

ب) B نقطه‌ای روی نمودار تابع است که مقدار تابع و مقدار مشتق در آن منفی است.

پ) C نقطه‌ای روی نمودار است که مقدار تابع در آنجا صفر است ولی مقدار مشتق در آن مثبت است.

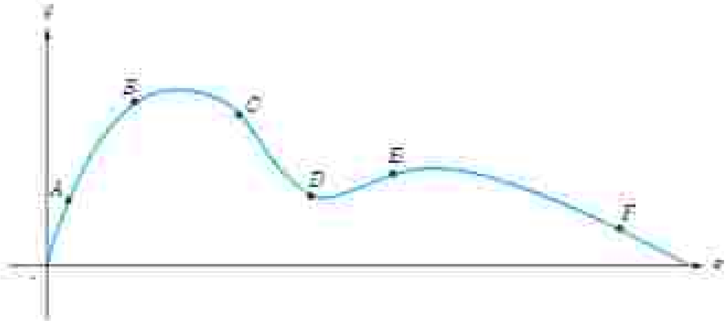
ت) D نقطه‌ای روی منحنی است که مشتق در آنجا صفر است.

ث) نقاط E و F نقاط متفاوتی روی منحنی هستند که مشتق یکسان دارند.

ج) G نقطه‌ای روی منحنی است که مقدار تابع در آنجا مثبت ولی مقدار مشتق منفی است.

۶ اگر $f(x)=x^2-2$ ، $f'(-1)$ را بدست آورید.

۷ نقاط A، B، C، D، E و F را روی منحنی زیر در نظر می‌گیریم. در مورد شیب منحنی در این نقاط کدام گزاره درست و کدام یک نادرست است؟



الف) شیب منحنی در همه این نقاط مثبت است.

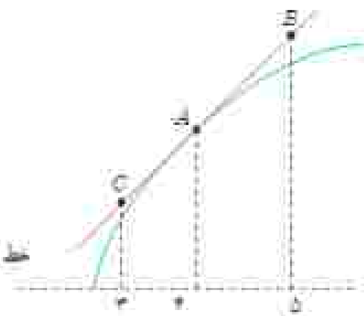
ب) $m_A<m_B$ (شیب خط مماس بر منحنی در نقطه A را با m_A نمایش داده‌ایم)

پ) $m_E<m_B<m_A$

ت) شیب منحنی در نقاط F، D و C منفی است.

ث) $m_F<m_D<m_C$

ج) $m_C<m_D<m_F<m_E<m_B<m_A$



۸ برای تابع f در شکل روبه‌رو داریم: $f'(4)=1/5$ و $f(4)=25$ با توجه به شکل مختصات نقاط A، B و C را بیابید.

درس دوم

مشتق‌پذیری و پیوستگی

در درس گذشته مشتق تابع f در نقطه‌ای به طول x_0 به یکی از دو صورت زیر تعریف شد:

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad \text{یا} \quad f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

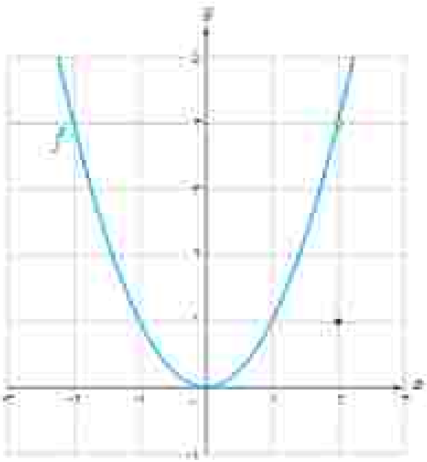
درصورت وجود حد (متناهی) فوق گفته می‌شود که f در x_0 مشتق‌پذیر است.

در مطالعه رفتار یک تابع، مشخص کردن نقاطی که تابع در آن نقاط مشتق‌پذیر نیست دارای اهمیت است.

در فعالیت زیر با یکی از حالت‌هایی که یک تابع در آن مشتق‌پذیر نیست آشنا می‌شوید.

فعالیت

نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\neq 2 \\ 1 & x=2 \end{cases}$ (شکل مقابل) را درنظر می‌گیریم:



الف) چگونه به کمک نمودار تابع و تعریف مشتق به عنوان شیب خط مماس می‌توانید استدلال کنید که $f'(2)$ وجود ندارد؟

اگر برای بررسی مشتق‌پذیری این تابع در $x=2$ تعریف مشتق f در $x=2$ را به کار گیریم:

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-1}{x-2}$$

حد صورت کسر برابر ۳ است و حد مخرج کسر برابر صفر است. وقتی $x\to 2$، داریم:

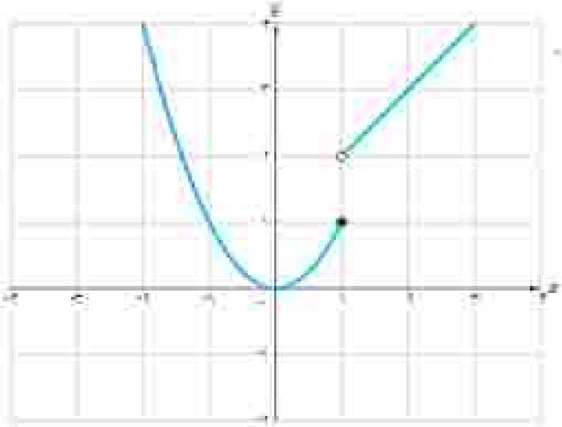
$$\text{حد راست}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-1}{x-2}=+\infty$$

$$\text{حد چپ}=\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-1}{x-2}=-\infty$$

بنابراین $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ موجود (و متناهی) نیست، پس $f'(2)$ وجود ندارد.

ب) نقطه دیگری (به‌جز $x=2$) در نظر بگیرید. آیا تابع در این نقطه مشتق‌پذیر است؟ پاسخ خود را با پاسخ دوستانتان مقایسه کنید.

کار در کلاس



تابع g (شکل روبه‌رو) را به‌صورت $g(x)=\begin{cases} x^2 & x\le 1 \\ x+1 & x>1 \end{cases}$ درنظر می‌گیریم.

چرا $g'(1)$ موجود نیست؟

توابع f و g فعالیت و کار در کلاس قبل به ترتیب در $x=2$ و $x=1$ ناپیوسته بودند و همان‌گونه که مشاهده کردید، $f'(2)$ و $g'(1)$ موجود نبودند. بنابراین به نظر می‌رسد که اگر تابعی در یک نقطه مشتق‌پذیر باشد، الزاماً در آن نقطه باید پیوسته باشد. این مطلب را به عنوان یک قضیه ثابت می‌کنیم.

قضیه: اگر تابع f در $x=a$ مشتق‌پذیر باشد آن‌گاه f در a پیوسته است.

اثبات: کافی است نشان دهیم: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

$$\lim_{x\to a}(f(x)-f(a))=\lim_{x\to a}\left((x-a)\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)\right)$$

$$=\lim_{x\to a}(x-a)\,\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)=0\cdot f'(a)=0$$

بنابراین $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-f(a))=0$ و از آنجا $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$ (چرا؟)

با توجه به این قضیه به‌طور منطقی می‌توان نتیجه گرفت که:

اگر تابع f در $x=a$ پیوسته نباشد، آن‌گاه f در $x=a$ مشتق‌پذیر هم نیست.

مثال بعد نشان می‌دهد که عکس قضیه درست نیست، یعنی حتی با وجود پیوستگی تابع در یک نقطه، لزوماً نمی‌توان مشتق‌پذیری تابع در آن نقطه را نتیجه گرفت.

مثال : مشتق‌پذیری تابع $f(x)=|x^2-1|$ را در $x=1$ بررسی کنید.

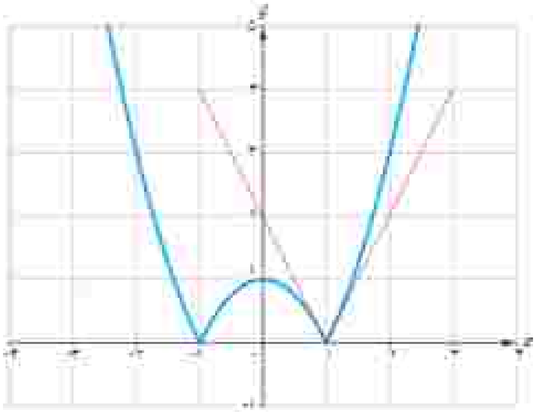
$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{|x^2-1|}{x-1}$$

برای محاسبهٔ $f'(1)$ ناچاریم حدهای راست و چپ را به‌دست آوریم.

$$\text{حد راست}=\lim_{x\to 1^+}\frac{|x^2-1|}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1}=2$$

$$\text{حد چپ}=\lim_{x\to 1^-}\frac{|x^2-1|}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{-(x^2-1)}{x-1}=-2$$

بنابراین $f'(1)$ موجود نیست. به‌عبارت دیگر خط مماس بر منحنی در نقطهٔ $x=1$ وجود ندارد. اما حدهای یک‌طرفهٔ فوق را می‌توان با وجود نیم‌خط‌های مماس بر منحنی در نقطهٔ $x=1$ توجیه کرد. اگر از سمت راست به نقطهٔ $x=1$ نزدیک شویم، شیب نیم‌خط مماس بر منحنی در این نقطه برابر ۲ و اگر از سمت چپ به $x=1$ نزدیک شویم، شیب خط مماس بر منحنی در این نقطه برابر ۲- است. حدهای راست و چپ بالا را به ترتیب مشتق‌های راست و چپ f در $x=1$ می‌نامیم و با $f'_+(1)$ و $f'_-(1)$ نمایش می‌دهیم.



در مثال قبل f در $x=1$ پیوسته است ولی f در آن مشتق‌پذیر نیست.

نیم‌خط‌های مماس راست و چپ را به اختصار، نیم مماس راست و چپ می‌نامیم.

در حقیقت :

$f'_-(1)=$ شیب نیم‌مماس چپ

$f'_+(1)=$ شیب نیم مماس راست

معادلهٔ این نیم‌مماس‌ها نیز به ترتیب عبارت‌اند از :

نیم مماس راست $\quad y-0=2(x-1)$ یا $y=2x-2\ ,\ x\geq 1$

نیم مماس چپ $\quad y-0=-2(x-1)$ یا $y=-2x+2\ ,\ x\leq 1$

کار در کلاس

نشان دهید که مشتق تابع f در مثال قبل در $x=-1$ نیز موجود نیست.

در صورت امکان معادلهٔ نیم‌مماس‌های راست و چپ در $x=-1$ را بنویسید.

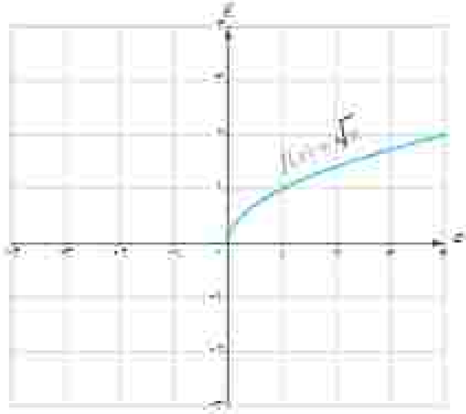
تعریف: مشتق راست و مشتق چپ تابع f در $x=a$ را با $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ نمایش می‌دهیم و آن را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

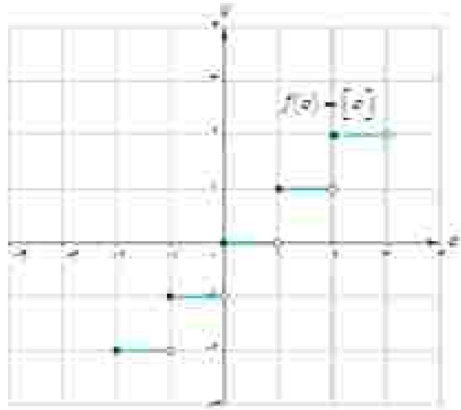
$$f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad , \quad f'_-(a)=\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

یا به‌طور معادل:

$$f'_+(a)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad , \quad f'_-(a)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

مثال: توابع $f(x)=[x]$ و $g(x)=\sqrt{x}$ در صفر پیوسته نیستند. بنابراین $f'(0)$ و $g'(0)$ موجود نیستند.

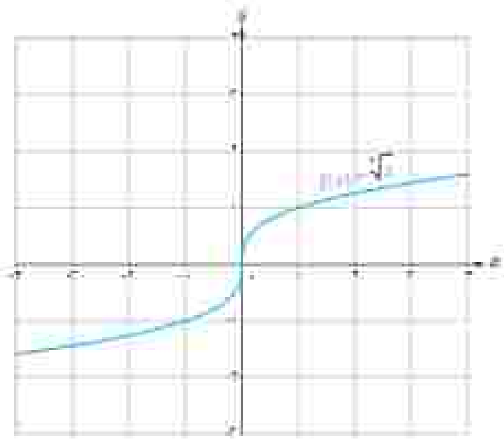




اکنون به بررسی حالت دیگری می‌پردازیم که در آن تابع مشتق‌پذیر نیست.

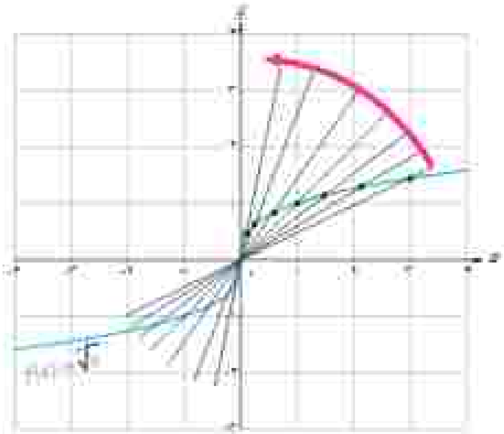
مثال: تابع $f(x)=\sqrt[3]{x}$ را درنظر می‌گیریم. مشتق‌پذیری این تابع را در $x=0$ بررسی کنید.

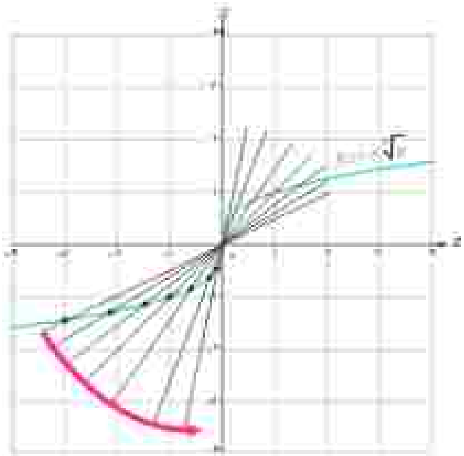
$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}-0}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=+\infty$$



بنابراین تابع f در صفر مشتق‌پذیر نیست. شکل‌ها نشان می‌دهند که وقتی از سمت راست یا چپ به نقطهٔ صفر نزدیک می‌شویم خط‌های قاطع به خط $x=0$ نزدیک می‌شوند.

تابع $f(x)=\sqrt[3]{x}$ در $x=0$ مشتق‌پذیر نیست. خط $x=0$ را **«مماس قائم»** منحنی می‌نامیم.





اگر تابع f در $x=a$ پیوسته باشد و در این نقطه مشتق چپ و راست نامتناهی داشته باشد، در این‌صورت خط $x=a$ را «مماس قائم» بر منحنی f در نقطه $(a, f(a))$ می‌نامیم. بدیهی است $f'(a)$ در این حالت وجود ندارد.

به‌طور خلاصه می‌توان گفت:

اگر تابع f در $x=a$ هر یک از شرایط زیر را داشته باشد، در این صورت f در این نقطه مشتق‌پذیر نیست.

۱ـ f در a پیوسته نباشد.

۲ـ f در a پیوسته باشد و مشتق راست و مشتق چپ در $x=a$:

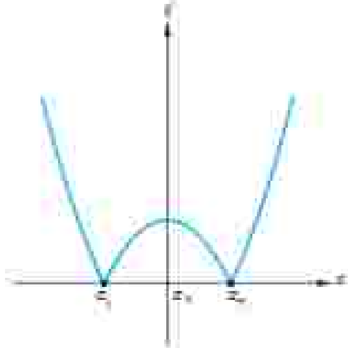
الف) هر دو موجود (متناهی) ولی نابرابر باشند (نقطه گوشه‌ای).

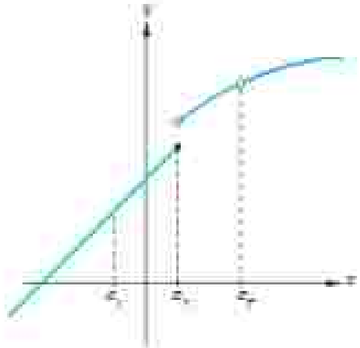
ب) یکی متناهی و دیگری نامتناهی باشند (نقطه گوشه‌ای).

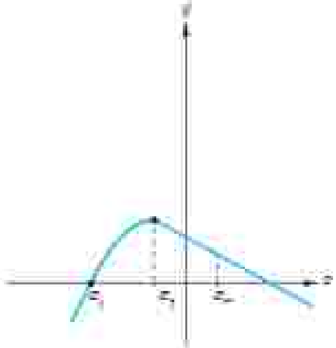
پ) هر دو نامتناهی باشند.

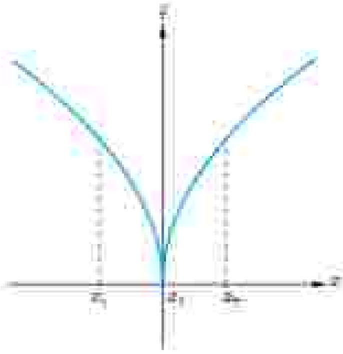
کار در کلاس

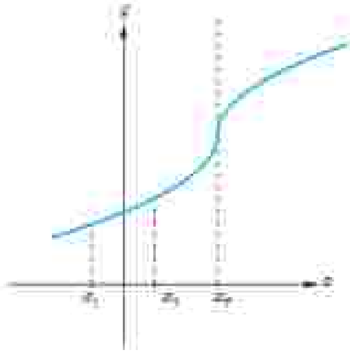
در شکل های زیر مشخص کنید که هر تابع در کدام نقطه یا نقاط مشخص شده مشتق پذیر نیست.

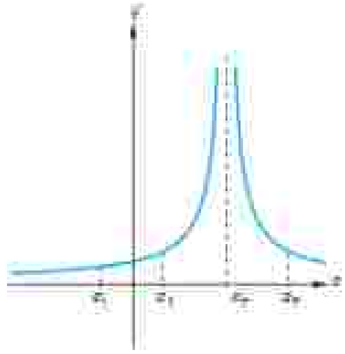










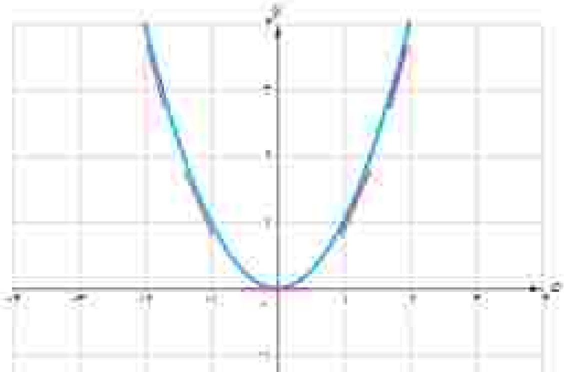


تابع مشتق

تاکنون با مفهوم مشتق تابع در یک نقطه (معین) آشنا شده‌اید. حال به دنبال یافتن رابطه‌ای بین مجموعه نقاط متعلق به دامنه یک تابع و مشتق تابع در آن نقاط هستیم.

فعالیت

تابع $f(x)=x^2$ را درنظر می‌گیریم.



جدول زیر را کامل کنید (مشتق تابع در برخی نقاط حساب شده‌اند).

x	-۳	-۲	-۱	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\sqrt{۳}$	۲
$f'(x)$		-۴		۰		$۲\sqrt{۳}$	۴

$$f'(-۲)=\lim_{x\to -۲}\frac{f(x)-f(-۲)}{x-(-۲)}=\lim_{x\to -۲}\frac{x^۲-۴}{x+۲}=\lim_{x\to -۲}(x-۲)=-۴$$

$$f'(\sqrt{۳})=\lim_{x\to\sqrt{۳}}\frac{f(x)-f(\sqrt{۳})}{x-\sqrt{۳}}=\lim_{x\to\sqrt{۳}}\frac{x^۲-۳}{x-\sqrt{۳}}=\lim_{x\to\sqrt{۳}}\frac{(x+\sqrt{۳})(x-\sqrt{۳})}{x-\sqrt{۳}}=۲\sqrt{۳}$$

$$f'(۰)=\lim_{x\to ۰}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to ۰}\frac{x^۲}{x}=۰$$

می‌دانیم مشتق تابع در یک نقطه (در صورت وجود) برابر شیب خط مماس بر منحنی در آن نقطه است و از طرفی مماس بر منحنی در هر نقطه یکتاست، بنابراین $f'(x)$ تابعی از x است. حدس می‌زنید در چه نقاطی مشتق تابع $f(x)=x^۲$ وجود دارد؟

اگر x عضوی از دامنه تابع f باشد، تابع مشتق f در x را با $f'(x)$ نمایش می‌دهیم و آن را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

مشروط بر آنکه حد فوق موجود باشد. مجموعه تمام نقاطی از دامنه f که برای آنها f' موجود باشد را دامنه f' می‌نامیم.

به‌طور مثال برای تابع $f(x)=x^۲$، دامنه تابع f'، مجموعه اعداد حقیقی است. روش محاسبه ضابطه تابع f' نیز، در ادامه ارائه شده است.

$$f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{(x+h)^۲-x^۲}{h}$$

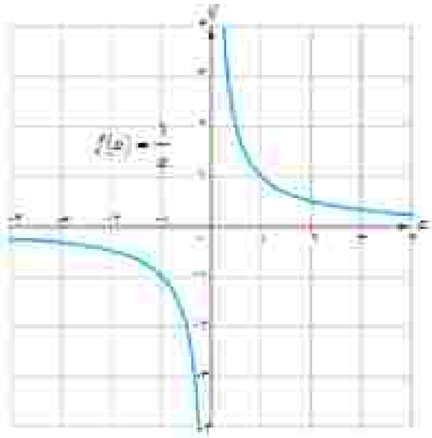
$$=\lim_{h\to ۰}\frac{x^۲+۲hx+h^۲-x^۲}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{h(۲x+h)}{h}=\lim_{h\to ۰}(۲x+h)=۲x$$

بنابراین $f'(x)=۲x$. همان‌گونه که قبلاً ذکر شد دامنه تابع f'، مجموعه اعداد حقیقی است. به کمک این دستور مقدار مشتق تابع $f(x)=x^۲$ در هر نقطه را می‌توان حساب کرد، به‌طور مثال :

$$f'(-\frac{۱}{۵})=-\frac{۲}{۵}\ ,\ f'(\sqrt{۷})=۲\sqrt{۷}\quad \text{و}\quad f'(۵۰)=۱۰۰$$

مثال: اگر $f(x)=\frac{1}{x}$، تابع مشتق و دامنه آن را به‌دست آورید. $f'(3)$ را با استفاده از تابع مشتق و سپس با استفاده از تعریف مشتق در $x=3$ به‌دست آورید.

حل: $f'(0)$ وجود ندارد. دامنه f' برابر $\mathbb{R}-\{0\}$ است. اگر $x\neq 0$ داریم:



$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x-x-h}{hx(x+h)}=\lim_{h\to 0}\frac{-h}{hx(x+h)}=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{x(x+h)}=-\frac{1}{x^2}$$

با استفاده از دستور فوق داریم: $f'(3)=\frac{-1}{9}$ البته مشتق f در هر نقطه دیگر ($x\neq 0$) را نیز به کمک این دستور می‌توان محاسبه کرد.
به‌طور مثال: $f'(\sqrt{5})=\frac{-1}{5}$ و $f'(-2)=-\frac{1}{4}$، $f'(3)$ را به‌طور مستقیم نیز می‌توان حساب کرد:

$$f'(3)=\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{3}}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\frac{3-x}{3x}}{\frac{x-3}{1}}=\lim_{x\to 3}\frac{-\cancel{(x-3)}}{3x\cancel{(x-3)}}=-\frac{1}{9}$$

در عمل هنگام حل مسائل با توجه به شرایط هر یک از دو روش فوق ممکن است مورد استفاده قرار گیرد.

کار در کلاس

اگر $f(x)=\begin{cases} 5x & x\neq 1 \\ 2 & x=1 \end{cases}$ دامنه f و دامنه f' را محاسبه کنید و ضابطه f' را به‌دست آورید. نمودار f و نمودار f' را رسم کنید.

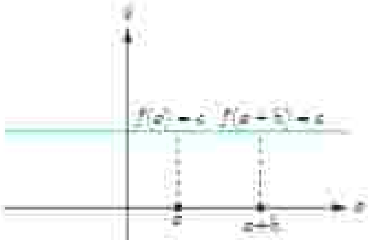
اکنون آماده هستیم که برای برخی از توابع، تابع مشتق را محاسبه کنیم.

محاسبهٔ تابع مشتق برخی توابع

۱ــ اگر $f(x)=c$ آن‌گاه $f'(x)=0$. به‌عبارت دیگر مشتق تابع ثابت در هر نقطه برابر صفر است.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=\lim_{h\to 0}0=0$$

به‌طور مثال اگر $f(x)=7$ و $g(x)=-\frac{2}{5}$ آن‌گاه $f'(x)=0$ و $g'(x)=0$.



۲ــ اگر $n\in\mathbb{N}$ و $f(x)=x^n$ آن‌گاه $f'(x)=nx^{n-1}$.

این دستور کاربرد زیادی دارد. قبلاً ثابت کردیم که اگر $f(x)=x^2$، آن‌گاه $f'(x)=2x$. همچنین اگر $f(x)=x^3$، به کمک این دستور نشان می‌دهیم که: $f'(x)=3x^2$

ابتدا این رابطهٔ آخر را ثابت می‌کنیم و از روش ارائه شده برای اثبات دستور مشتق $f(x)=x^n$ استفاده می‌کنیم. اگر $f(x)=x^3$ داریم:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h-x)[(x+h)^2+x(x+h)+x^2]}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h[(x+h)^2+x(x+h)+x^2]}{h}=\lim_{h\to 0}[(x+h)^2+x(x+h)+x^2]=x^2+x^2+x^2=3x^2$$

سومین تساوی در اثبات فوق بر اساس اتحاد $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ به‌دست آمده است.

در حالت کلی می‌توان نشان داد که: $(n\in\mathbb{N})$ $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+b^{n-1})$ از این اتحاد در ادامه برای محاسبهٔ مشتق $f(x)=x^n$ استفاده شده است.

اکنون اگر $f(x)=x^n$، محاسبات کمی دشوارتر می‌شود، اما در عوض دستور مهم‌تری را ثابت کرده‌ایم:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(\cancel{x}+h-\cancel{x})[(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}x+\cdots+(x+h)x^{n-2}+x^{n-1}]}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}[(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}x+\cdots+(x+h)x^{n-2}+x^{n-1}]$$

$$=\underbrace{x^{n-1}+x^{n-1}+\cdots+x^{n-1}+x^{n-1}}_{n}=nx^{n-1}$$

۳ـ به‌طور کلی اگر n یک عدد **صحیح** باشد و $f(x)=x^n$ آن‌گاه: $f'(x)=nx^{n-1}$

مثال: اگر $f(x)=\frac{1}{x}$ و $x\neq 0$ قبلاً دیدید که $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$

همچنین با استفاده از دستور اخیر داریم: $f(x)=\frac{1}{x}=x^{-1} \Rightarrow f'(x)=-x^{-1-1}=-x^{-2}=-\frac{1}{x^2}$

۴*ـ اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $x>0$ آن‌گاه $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

۵ـ اگر $f(x)=\sqrt{ax+b}$ و $ax+b>0$ آن‌گاه $f'(x)=\frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{a(x+h)+b}-\sqrt{ax+b}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{a(x+h)+b}-\sqrt{ax+b})(\sqrt{a(x+h)+b}+\sqrt{ax+b})}{h(\sqrt{a(x+h)+b}+\sqrt{ax+b})}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{ax}+ah+\cancel{b}-\cancel{ax}-\cancel{b}}{h(\sqrt{a(x+h)+b}+\sqrt{ax+b})}=\lim_{h\to 0}\frac{a}{\sqrt{a(x+h)+b}+\sqrt{ax+b}}=\frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$$

۶ـ اگر $f(x)=\sqrt[3]{x}$ آن‌گاه $f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x(x+h)}+\sqrt[3]{x^2})}{h\underbrace{(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x(x+h)}+\sqrt[3]{x^2})}_{A}}=\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h.A}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

---

* در مورد توابع رادیکالی در این کتاب فقط مشتق تابع $\sqrt{f(x)}$ و $\sqrt[3]{f(x)}$ که $f(x)>0$ مورد نظر است. مطالعهٔ این موضوع در این سطح ها الزامی است.

۷ـ اگر توابع f و g در $x=a$ مشتق‌پذیر باشند، آن‌گاه توابع kf $(k\in\mathbb{R})$، $f\pm g$، fg و $\frac{f}{g}$ $(g(a)\neq 0)$ نیز در $x=a$ مشتق‌پذیرند و داریم:

الف) $(f\pm g)'(a)=f'(a)\pm g'(a)$

ب) $(kf)'(a)=kf'(a)$

پ) $(fg)'(a)=f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$

ت) $(\frac{f}{g})'(a)=\dfrac{f'(a)g(a)-g'(a)f(a)}{(g(a))^2}$

به کمک تعریف مشتق هر یک از روابط بالا را می‌توان ثابت نمود، اما در این کتاب به اثبات آنها نمی‌پردازیم.

مثال: مشتق چند تابع محاسبه شده است.

الف) $f(x)=-\frac{2}{3}x^4 \Rightarrow f'(x)=-\frac{8}{3}x^3$

ب) $g(x)=x^5+4x^3-\sqrt{2}x+1 \Rightarrow g'(x)=5x^4+12x^2-\sqrt{2}$

پ) $h(x)=(2x^3+1)(-x^2+7x-2) \Rightarrow h'(x)=6x^2(-x^2+7x-2)+(2x^3+1)(-2x+7)$

ت) $t(x)=\dfrac{x^2-4}{3x+1} \Rightarrow t'(x)=\dfrac{2x(3x+1)-3(x^2-4)}{(3x+1)^2}$

کار در کلاس

۱ مشتق تابع‌های زیر را به‌دست آورید:

الف) $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$ ب) $g(x)=\sqrt{x}(3x^2+5)$ پ) $h(x)=\dfrac{x}{2x^2+x-1}$

۲ اگر f و g توابع مشتق‌پذیر باشند و $f(2)=3$، $f'(2)=5$، $g(2)=8$ و $g'(2)=-6$ مقدار $(fg)'(2)$ و $(\frac{f}{g})'(2)$ را به‌دست آورید.

مشتق تابع مرکب / قاعده زنجیری

اگر f و g دو تابع مشتق‌پذیر باشند، در این صورت تابع مرکب fog مشتق‌پذیر است و داریم:

$(fog)'(x)=g'(x)f'(g(x))$

مثال : اگر $h(x) = (x^2+3x+1)^7$، مطلوب است $h'(x)$.

حل : اگر $f(x) = x^7$ و $g(x) = x^2+3x+1$، آن گاه : $h(x) = f(g(x))$

$$h'(x) = g'(x)f'(g(x)) = (2x+3)\,f'(g(x))$$

اگر $u = g(x)$ آن گاه لازم است که $f'(u)$ را پیدا کنیم.

$$f(u) = u^7 \Rightarrow f'(u) = 7u^6 = 7(g(x))^6 = 7(x^2+3x+1)^6$$

بنابراین :

$$h'(x) = (2x+3)(7)(x^2+3x+1)^6$$

دستور فوق را به صورت زیر نیز می توان ارائه کرد.

> اگر f تابعی برحسب u و u تابعی از x باشد :
>
> $y = f(u) \Rightarrow y' = u'f'(u)$

مثال : مشتق تابع $y = (\frac{x^2}{3x-1})^5$ را به دست آورید.

حل : با فرض $u = \frac{x^2}{3x-1}$ داریم : $y = u^5$ و از آنجا :

$$y' = u'.5u^4 = \frac{2x(3x-1)-3x^2}{(3x-1)^2}\,5(\frac{x^2}{3x-1})^4 = 5(\frac{3x^2-2x}{(3x-1)^2})(\frac{x^2}{3x-1})^4$$

کار در کلاس

مشتق تابع های زیر را به دست آورید.

الف) $f(x) = (x^2+1)^3(5x-1)$

ب) $g(x) = (\frac{-3x-1}{x^2+5})^8$

مشتق‌پذیری روی یک بازه

> تابع f روی بازهٔ (a , b) مشتق‌پذیر است هرگاه، در هر نقطه این بازه مشتق‌پذیر باشد.
>
> تابع f روی بازهٔ $[a , b]$ مشتق‌پذیر است، هرگاه f در بازهٔ (a , b) مشتق‌پذیر باشد و در نقطه a مشتق راست و در b مشتق چپ داشته باشد.

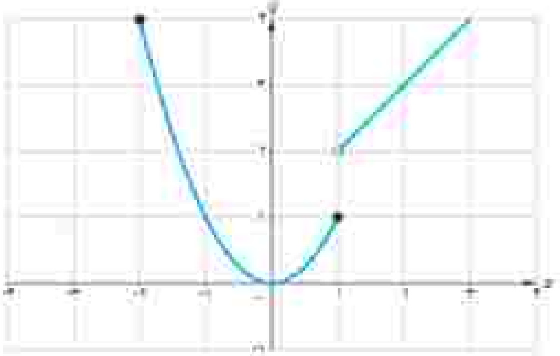
کار در کلاس

مشتق‌پذیری روی بازه‌های $[a, b)$ و $(a, b]$ را به‌طور مشابه تعریف کنید.

تابع f روی بازه $[a, b)$ مشتق‌پذیر است هرگاه ...

تابع f روی بازه $(a, b]$ مشتق‌پذیر است هرگاه ...

اگر $D_f = \mathbb{R}$ و f در هر عدد حقیقی مشتق‌پذیر باشد، گوییم f روی بازه $(-\infty, +\infty)$ مشتق‌پذیر است.

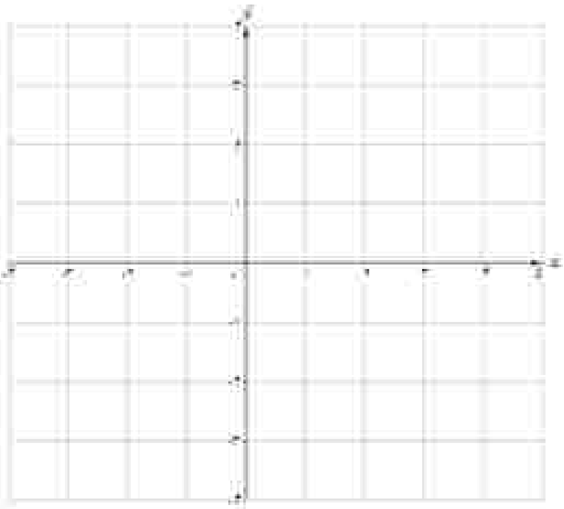


مثال: تابع $f(x)=\begin{cases} x^2 & -2 \le x \le 1 \\ x+1 & x>1 \end{cases}$ را در نظر می‌گیریم.

f روی بازه‌های $[-2, 1]$ و $(1, \infty)$ مشتق‌پذیر است. ولی f روی بازه $[1, 2]$ مشتق‌پذیر نیست (چرا؟)

کار در کلاس

اگر $f(x)=\begin{cases} 2x+2 & x<-1 \\ x^2-1 & -1 \le x < 2 \\ -x+5 & 2 \le x < 5 \end{cases}$ نمودار f را رسم کنید و مشتق‌پذیری f را روی بازه‌های $[-1, 1]$، $(2, 5)$ و $[-2, 0]$ بررسی کنید.



مشتق مرتبه دوم

مشتق تابع $y=f(x)$ با نماد $y'=f'(x)$ نمایش داده شد. به همین ترتیب اگر تابع مشتق، مشتق‌پذیر باشد، مشتق مرتبه دوم $y=f(x)$ را به $y''=f''(x)$ نمایش می‌دهیم و برای محاسبه آن از تابع $y'=f'(x)$ نسبت به x مشتق می‌گیریم.

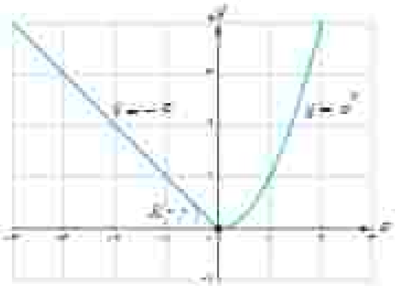
مثال: اگر $y=3x^4+2x^2-1$ آن‌گاه:

$$y'=12x^3+4x \quad , \quad y''=36x^2+4$$

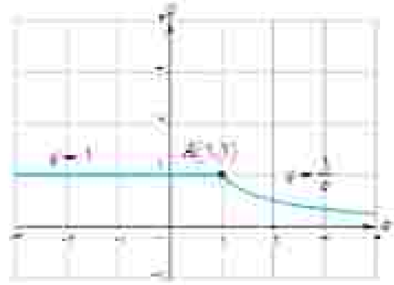
تمرین

۱ دو تابع مختلف مانند f و g مثال بزنید که هر دو در $x=2$ پیوسته باشند ولی در این نقطه مشتق‌پذیر نباشند.

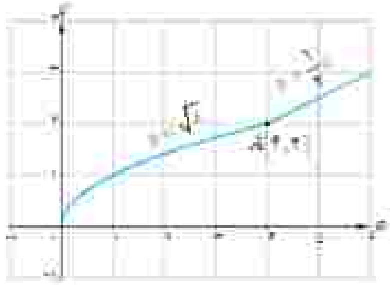
۲ با محاسبه مشتق راست و مشتق چپ توابع داده شده در نقطه A، نشان دهید که این توابع در نقطه A مشتق‌پذیر نیستند.



(الف)



(ب)



(پ)

۳ تابع
$$f(x)=\begin{cases} 5x-4 & x<0 \\ x^2 & 0\le x\le 3 \\ x+6 & x>3 \end{cases}$$
داده شده است.

الف) نمودار تابع f را رسم کنید.

ب) با توجه به نمودار تابع f بگویید که چرا $f'(0)$ و $f'(3)$ وجود ندارد؟

پ) ضابطه تابع مشتق را بنویسید.

ت) نمودار تابع f' را رسم کنید.

۴ نمودار تابعی را رسم کنید که مشتق آن

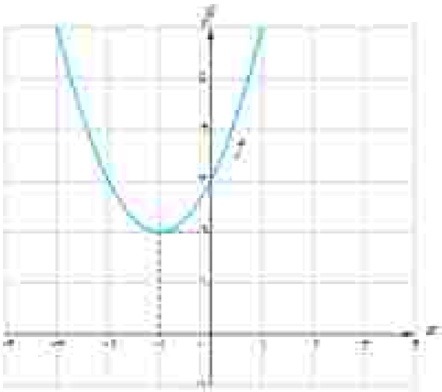
الف) در یک نقطه برابر صفر شود.

ب) در $x=2$ برابر ۳ شود.

پ) در تمام نقاط مثبت باشند.

ت) در تمام نقاط یکسان باشند.

ث) در تمام نقاط منفی باشند.



۵ الف) با استفاده از نمودار تابع $f(x)=x^2+2x+3$ (شکل مقابل) مقادیر زیر را به ترتیب صعودی مرتب کنید.

$$f'(3) \text{ و } f'(0) \text{ و } f'(-1) \text{ و } f'(2)$$

ب) صحت ادعای خود در (الف) را با محاسبه مشتق تابع $f(x)=x^2+2x+3$ بررسی کنید.

پ) تابع مشتق را رسم کنید.

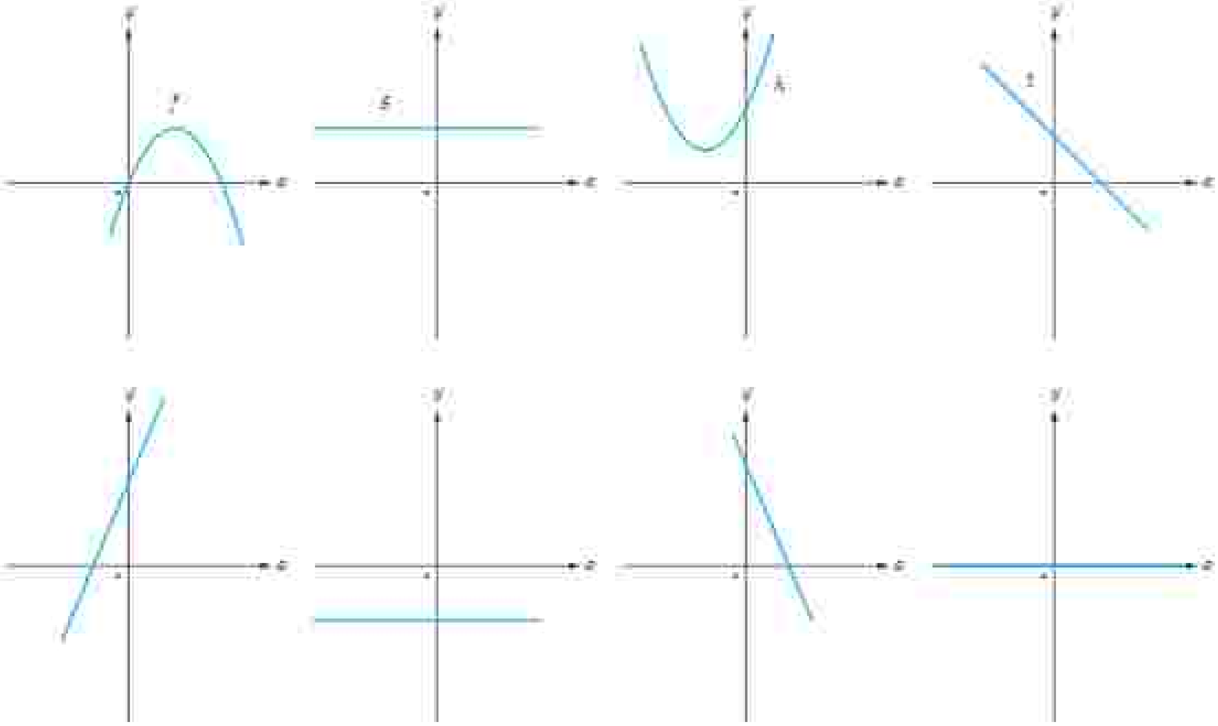
۶ مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\begin{cases} x^2+3 & x\geq 1 \\ 2x & x<1 \end{cases}$ را در نقطه $x=1$ بررسی کنید.

۷ سه تابع مختلف مثال بزنید که مشتق آنها با هم برابر باشند.

۸ اگر $f(x)=|x^2-4|$، به کمک تعریف مشتق، مشتق‌پذیری f را در نقاط به طول‌های ۲ و ۲− بررسی کنید.

۹ مشتق تابع $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ را به‌دست آورده و مشخص کنید در چه نقطه‌ای مماس قائم دارد؟

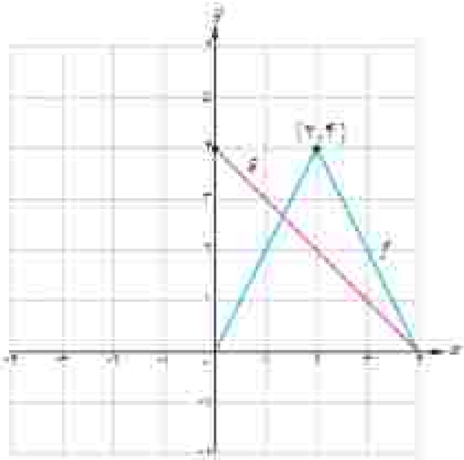
۱۰ نمودار توابع f و g و h و t را به نمودار مشتق آنها نظیر کنید.



۱۱ نمودار توابع f و g را در شکل زیر درنظر بگیرید.

الف) اگر $h(x)=f(x).g(x)$، مطلوب است $h'(1)$، $h'(2)$ و $h'(3)$

ب) اگر $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ مطلوب است، $h'(1)$، $h'(2)$ و $h'(3)$



۱۲ اگر $f'(1)=3$ و $g'(1)=5$ مطلوب است، $(f+g)'(1)$ و $(3f+2g)'(1)$

۱۳ اگر $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\le 0 \\ x & x>0 \end{cases}$ نشان دهید $f'_+(0)$ و $f'_-(0)$ موجودند ولی $f'(0)$ موجود نیست.

۱۴ مشتق توابع داده شده را به‌دست آورید.

الف) $f(x)=(3x^2-4)(2x-5)^2$

ب) $f(x)=(\sqrt{3x+2})(x^3+1)$

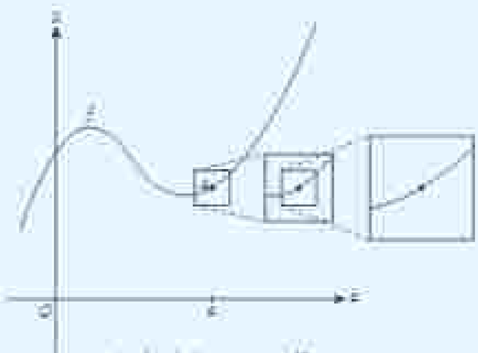
پ) $f(x)=\dfrac{x^3-3x+1}{-3x+4}$

ت) $f(x)=\dfrac{9x-2}{\sqrt{x}}$

۱۵ اگر $f(x)=5x^3-4x^2-3x$ ، مقدار $f''(-1)$ را به‌دست آورید.

خواندنی

مشتق‌پذیری در یک نقطه به‌صورت شهودی می‌تواند برحسب رفتار تابع در نزدیکی نقطه $A(a, f(a))$ تعبیر شود. اگر نمودار تابع را در نزدیک نقطه A در نظر بگیریم و مرتباً از نمای نزدیک‌تری به نمودار نگاه کنیم، هنگامی که f در a مشتق‌پذیر باشد، نمودار منحنی شبیه یک خط راست می‌شود.



تابع در a مشتق‌پذیر است

تابع در a مشتق‌پذیر نیست

درس سوم

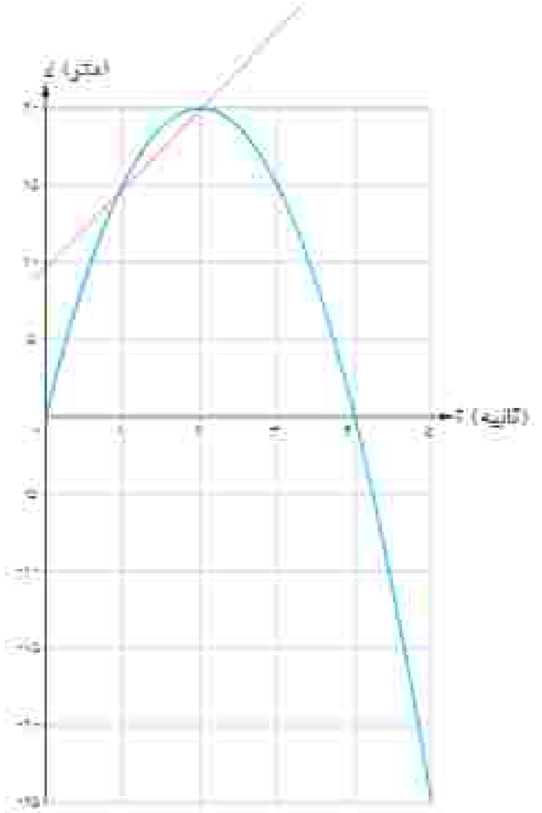
آهنگ تغییر

با مفهوم سرعت متوسط در فیزیک آشنا شده‌اید. اگر اتومبیلی در امتداد خط راست مسافت ۲۸۰ کیلومتر را در ۴ ساعت طی کند سرعت متوسط آن در این زمان، $v = \frac{۲۸۰}{۴} = ۷۰$ کیلومتر بر ساعت است. با این حال ممکن است اتومبیل در لحظات مختلف سرعت‌های متفاوتی داشته باشد. همچنین مطابق آنچه که در درس فیزیک آموخته‌اید، سرعت متوسط روی یک بازهٔ زمانی خیلی کوچک، به سرعت لحظه‌ای نزدیک است. اگر نمودار مکان ـ زمان در مورد حرکت اتومبیل را داشته باشیم، سرعت متوسط اتومبیل بین هر دو لحظهٔ دلخواه، برابر شیب خطی است که نمودار مکان ـ زمان را در آن دو لحظه قطع می‌کند.

همچنین در درس فیزیک سرعت لحظه‌ای در هر لحظهٔ دلخواه t، برابر شیب خط مماس بر نمودار در آن لحظه تعریف شد. با آنچه که در درس‌های گذشته ملاحظه کردید، می‌توان گفت که سرعت در لحظهٔ t همان مقدار مشتق تابع (مکان ـ زمان) در لحظهٔ t است. مفهوم مشتق را در بسیاری از پدیده‌های دیگر نیز می‌توان مشاهده کرد. ابتدا در مورد سرعت متوسط و سرعت لحظه‌ای به ذکر مثالی خواهیم پرداخت.

مثال : خودرویی در امتداد خط راست طبق معادله $d(t)=-5t^2+20t$ حرکت می‌کند، که در آن $0\leq t\leq 5$ برحسب ثانیه است. با در نظر گرفتن نمودار مکان ـ زمان (شکل) :

الف) سرعت متوسط خودرو را در بازه‌های زمانی [۱,۲]، [۱,۱/۵] و [۱,۱/۴] به‌دست آورید.



ب) اگر به همین ترتیب بازه‌های کوچک‌تری مانند [۱,۱/۳] و [۱,۱/۲] و ... اختیار کنیم، سرعت متوسط در این بازه‌ها به چه عددی نزدیک می‌شود؟

پ) سرعت لحظه‌ای را با استفاده از مشتق تابع d در $t=1$ به‌دست آورید.

ت) سرعت لحظه‌ای در $t=2$ و $t=3$ چقدر است؟

حل :

الف)

$$\text{سرعت متوسط در بازه زمانی } [1,2] = \frac{d(2)-d(1)}{2-1}=\frac{20-15}{1}=5\,\frac{m}{s}$$

$$\text{سرعت متوسط در بازه زمانی } [1,1/5] = \frac{d(1/5)-d(1)}{1/5-1}=\frac{18/75-15}{0/5}=\frac{3/75}{0/5}=7/5\,\frac{m}{s}$$

$$\text{سرعت متوسط در بازه زمانی } [1,1/4] = \frac{d(1/4)-d(1)}{1/4-1}=\frac{18/2-15}{0/4}=\frac{3/2}{0/4}=8\,\frac{m}{s}$$

ب) اگر به همین ترتیب بازه‌های زمانی کوچک‌تری اختیار کنیم، سرعت متوسط به سرعت لحظه‌ای در $t=1$ نزدیک می‌شود.

پ) $d'(t)=-10t+20$ ، پس ، $d'(1)=10$

ت) $d'(2)=0$ ، $d'(3)=-10$

سرعت در لحظهٔ ۲ = t، صفر است و مماس بر منحنی در این نقطه موازی محور tهاست و خودرو ساکن است. مقدار سرعت در لحظه‌های ۱ = t و ۳ = t برابر است و علامت منفی در مورد $d'(3)$ نشان می‌دهد که جهت حرکت در ۳ = t برخلاف جهت حرکت در ۱ = t است.

به جز مفهوم سرعت، در مطالعه پدیده‌های زیاد دیگری که در قالب یک تابع نمایش داده می‌شوند با موضوع نسبت تغییرات متغیر وابسته به تغییرات متغیر مستقل مواجه می‌شویم. نسبت تغییرات دما به تغییرات زمان و همچنین نسبت تغییرات جمعیت نسبت به زمان نمونه‌های دیگری از این‌گونه تغییرات هستند.

به‌طور کلی آهنگ متوسط تغییر یک تابع را در بازه‌ای مانند $[a , a+h]$ به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} =$$ آهنگ متوسط تغییر تابع f در بازه $[a , a+h]$

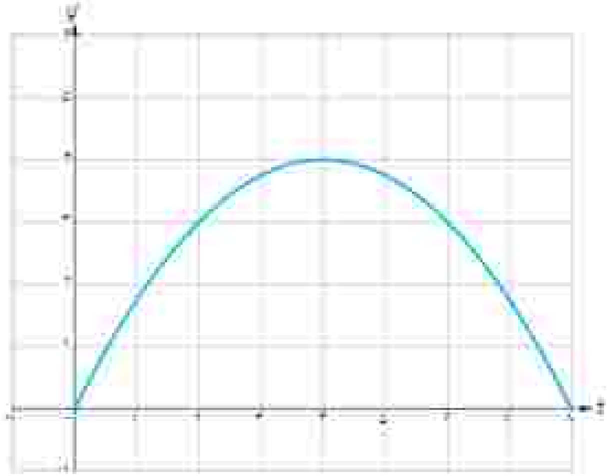
همچنین آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} =$$ آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع f در نقطه $x=a$

آهنگ متوسط تغییر با شیب خط قاطع و آهنگ لحظه‌ای تغییر با مقدار مشتق و شیب خط مماس در آن نقطه برابرند.

کار در کلاس

۱ نمودار زیر موقعیت یک ذره را در لحظه t نمایش می‌دهد. مقادیر زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید:
(محاسبهٔ عددی لازم نیست.)



A. سرعت متوسط بین ۱ = t و ۳ = t

B. سرعت متوسط بین ۵ = t و ۶ = t

C. سرعت لحظه‌ای در ۱ = t

D. سرعت لحظه‌ای در ۳ = t

E. سرعت لحظه‌ای در ۵ = t

F. سرعت لحظه‌ای در ۶ = t

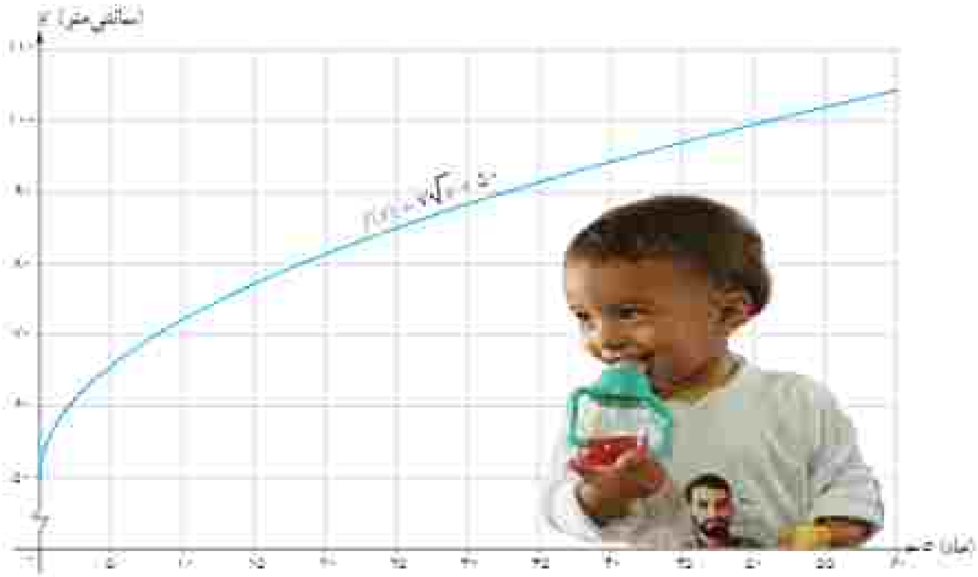
کاربردهایی دیگر از آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر

آهنگ رشد : تابع $f(x)=7\sqrt{x}+50$ قد متوسط کودکان را برحسب سانتی‌متر تا حدود ۶۰ ماهگی نشان می‌دهد، که در آن x مدت زمان پس از تولد (برحسب ماه) است. به‌طور مثال $f(25)=85$

آهنگ متوسط رشد در بازهٔ زمانی $[0,60]$ چنین است :

$$\frac{f(60)-f(0)}{60-0}=\frac{7\sqrt{60}+50-50}{60}\approx 0/9\ \frac{\text{سانتی‌متر}}{\text{ماه}}$$

یعنی در طی ۵ سال، رشد متوسط قد حدود ۰/۹ سانتی‌متر در هر ماه است.



کار در کلاس

الف) آهنگ متوسط رشد در بازهٔ زمانی $[0,25]$ چقدر است؟

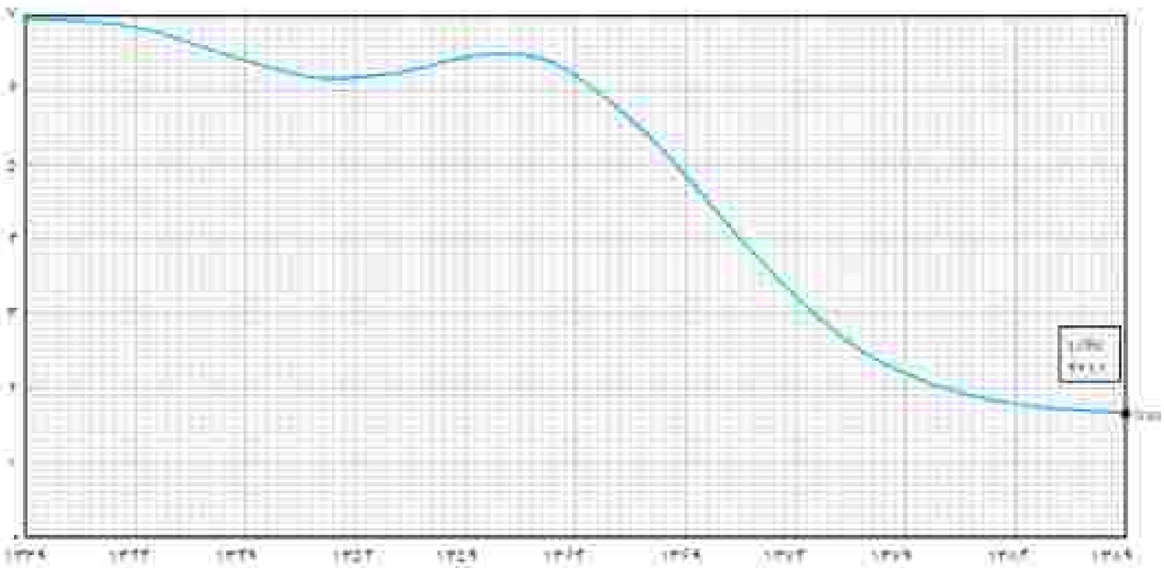
ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر قد کودک را در ۲۵ ماهگی و ۴۹ ماهگی، با هم مقایسه کنید. کدام‌یک بیشتر است؟

پ) اگر قد علی در ۱۶ ماهگی، ۸۰ سانتی‌متر و در ۳۶ ماهگی، ۹۵ سانتی‌متر باشد، آهنگ متوسط تغییر رشد او را در این فاصله حساب کنید و با نمودار بالا مقایسه کنید.

نرخ باروری : نمودار زیر روند رو به کاهش نرخ باروری در کشورمان را در طی نیم‌قرن نمایش می‌دهد. آهنگ متوسط تغییر باروری در بازه زمانی [۱۳۸۹ , ۱۳۳۹] در مدت ۵۰ سال برابر است با :

$$\frac{۱/۶-۷}{۱۳۸۹-۱۳۳۹}=\frac{-۵/۴}{۵۰}=-۰/۱۰۸$$

آهنگ متوسط تغییر باروری در بازه زمانی [۱۳۷۹ , ۱۳۶۴] را بدست آورید. (با استفاده از مقادیر تقریبی روی نمودار) بازه زمانی را مشخص کنید که در آن آهنگ متوسط تغییر باروری مثبت باشد.



میانگین تعداد فرزندان متولد شده به ازای هر مادر ایرانی

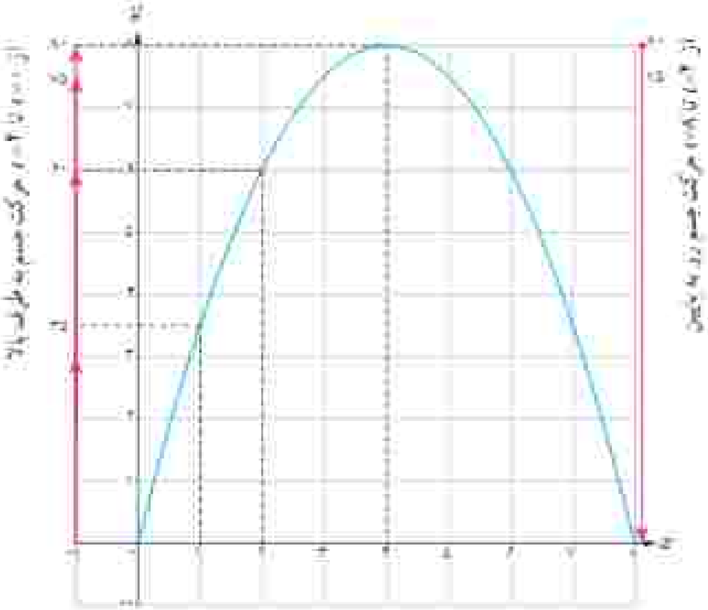
خواندنی

نرخ باروری در ایران در سال‌های ۱۳۶۰ تا ۱۳۶۵ به حدود ۶/۵ فرزند رسید. با توجه به اینکه کشورمان امکانات لازم برای چنین رشد جمعیت بالایی را دارا نبود، سیاست‌های کاهش جمعیت و عوامل دیگر باعث شد که نرخ باروری تا سال ۱۳۸۵ به ۱/۹ کاهش یابد. بررسی‌ها نشان می‌دهند که کاهش باروری در ایران بزرگ‌ترین و سریع‌ترین کاهش باروری ثبت شده بود. کارشناسان معتقدند که باید سیاست‌های کاهش رشد جمعیت پس از کاهش نرخ باروری به حدود ۲/۵ فرزند متوقف می‌شد. کاهش رشد جمعیت مشکلات فراوانی نظیر کاهش نیروی کار و بحران سالمندی را در پی خواهد داشت. با ابلاغ سیاست‌های کلی جمعیت توسط رهبر معظم انقلاب اسلامی در سال ۱۳۹۳، و تغییر برنامه‌های وزارت بهداشت، و براساس نتایج سرشماری عمومی نفوس و مسکن سال ۱۳۹۵، نرخ باروری به حدود ۲/۰۱ افزایش یافته است. با این حال نگرانی‌های مربوط به احتمال کاهش بیش از حد رشد جمعیت در سال‌های ۱۴۲۵ تا ۱۴۳۰ تأکید می‌کند که این سیاست‌ها تا دستیابی کامل به اهداف تعیین شده باید دنبال شود.

سرعت متوسط و سرعت لحظه‌ای

مثال: جسمی را از سطح زمین به‌طور عمودی پرتاب می‌کنیم. جهت حرکت به طرف بالا را مثبت در نظر می‌گیریم. فرض کنیم ارتفاع این جسم از سطح زمین در هر لحظه از معادله $h(t)=-5t^2+40t$ به‌دست می‌آید. به‌طور مثال ۲ ثانیه پس از پرتاب این جسم در ارتفاع ۶۰ متری از سطح زمین است.

به هر حال جسم پس از مدتی به زمین برمی‌گردد. نمودار مکان ــ زمان حرکت این جسم در شکل نشان داده شده است.



اگر سرعت متوسط این جسم در بازه‌های زمانی $[0,2]$ ، $[1,2]$ ، $[2,3]$ و $[3,4]$ را به ترتیب با v_1 ، v_2 ، v_3 و v_4 نمایش دهیم، داریم:

$$v_1=\frac{h(2)-h(0)}{2-0}=\frac{60}{2}=30\,\mathrm{m/s}$$

$$v_2=\frac{h(2)-h(1)}{2-1}=25\,\mathrm{m/s}$$

$$v_3=\frac{h(3)-h(2)}{3-2}=\frac{75-60}{1}=15\,\mathrm{m/s}$$

$$v_4=\frac{h(4)-h(3)}{4-3}=\frac{80-75}{1}=5\,\mathrm{m/s}$$

سرعت لحظه‌ای در زمان‌های $t=1$ ، $t=2$ ، $t=3$ و $t=4$ با استفاده از مشتق تابع h چنین به‌دست می‌آید:

$$h(t)=-5t^2+40t \Longrightarrow h'(t)=-10t+40$$

$$h'(1)=30\,\mathrm{m/s}\quad,\quad h'(2)=20\,\mathrm{m/s}\quad,\quad h'(3)=10\,\mathrm{m/s}\quad,\quad h'(4)=0\,\mathrm{m/s}$$

در $t=4$ جسم به بالاترین ارتفاع خود از سطح زمین (۸۰ متر) می‌رسد و در این لحظه سرعت آن برابر صفر (متر بر ثانیه) می‌شود. سپس جسم شروع به حرکت به طرف زمین می‌کند. سرعت متوسط در بازه $[4,5]$ برابر $\frac{h(5)-h(4)}{5-4}=\frac{75-80}{1}=-5\,\mathrm{m/s}$ و سرعت لحظه‌ای در $t=5$ برابر $h'(5)=-10\,\mathrm{m/s}$ است. علامت منفی نشان می‌دهد که حرکت جسم رو به پایین است.

کار در کلاس

با توجه به مثال قبل :

الف) سرعت جسم هنگام پرتاب و هنگام برخورد به زمین را به‌دست آورید.

ب) سرعت متوسط جسم را در بازهٔ زمانی [۵ ، ۸] به‌دست آورید.

پ) لحظاتی را معلوم کنید که سرعت جسم ۳۵ m/s و ۳۵ m/s− است.

تمرین

۱) جدول زیر درجه حرارت T (سانتی‌گراد) را در شهری از ساعت ۸ تا ۱۸ در یک روز نشان می‌دهد.

ساعت h	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸
درجه حرارت T	۱۱	۱۳	۱۴	۱۷	۱۹	۱۸	۱۷	۱۵	۱۳	۱۰	۹

آهنگ تغییر متوسط درجه حرارت نسبت به زمان را :

الف) از ساعت ۸ تا ساعت ۱۲ به‌دست آورید.

ب) از ساعت ۱۲ تا ساعت ۱۸ به‌دست آورید.

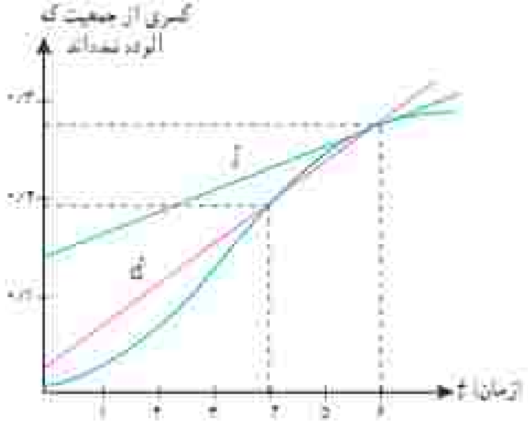
پ) پاسخ‌ها را تفسیر کنید.

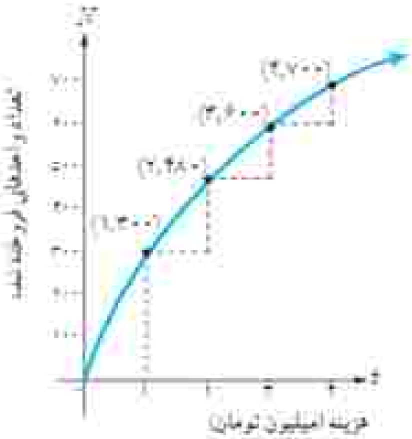
۲) کسری از جمعیت یک شهر که به وسیله یک ویروس آلوده شده‌اند برحسب زمان (هفته) در نمودار زیر نشان داده شده است.

الف) شیب‌های خطوط l_1 و l_2 چه چیزهایی را نشان می‌دهند.

ب) گسترش آلودگی در کدام یک از زمان‌های $t=1$ ، $t=2$ یا $t=3$ بیشتر است؟

پ) قسمت ب را برای $t=4$ ، $t=5$ و $t=6$ بررسی کنید.





۳ نمودار روبه‌رو نمایش میزان فروش تعداد نوعی کالا (N) پس از صرف t میلیون تومان هزینه برای تبلیغ است.

الف) آهنگ تغییر N، برحسب t را وقتی t از ۰ تا ۱، ۱ تا ۲، ۲ تا ۳ و ۳ تا ۴ تغییر می‌کند به‌دست آورید.

ب) به نظر شما چرا آهنگ تغییرات، وقتی که مقادیر t افزایش می‌یابد، در حال کاهش است؟

۴ معادله حرکت متحرکی به‌صورت $f(t)=t^2-t+10$ (f برحسب متر در بازه زمانی $[0, 5]$؛ t برحسب ثانیه) داده شده است. در کدام لحظه سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازهٔ زمانی $[0, 5]$ با هم برابرند؟

۵ توپی از یک پل به ارتفاع ۱۱ متر به هوا پرتاب می‌شود، $f(t)$ نشان‌دهنده فاصله توپ از سطح زمین در زمان t است. برخی از مقادیر $f(t)$ در جدول روبه‌رو نمایش داده شده است.

t	ثانیه s	۰	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶
$f(t)$	متر m	۱۱	۱۲/۴	۱۳/۸	۱۵/۱	۱۶/۳	۱۷/۴	۱۸/۴

بر اساس جدول کدام‌یک از مقادیر زیر می‌تواند سرعت توپ را هنگامی که در ارتفاع نظیر زمان ۰/۴ ثانیه، است نشان دهد؟

الف) ۱/۲۳m/s ب) ۱۲/۹۱m/s پ) ۱۱/۵m/s ت) ۱۶/۰۳m/s

۶ کدام‌یک از عبارات زیر درست و کدام‌یک نادرست است:

الف) آهنگ تغییر متوسط تابعی مانند f در بازه $[0,1]$ همیشه کمتر از شیب آن منحنی در نقطه است.

ب) اگر تابعی صعودی باشد، آهنگ تغییر متوسط آن، همواره صعودی است.

پ) تابعی وجود ندارد که برای آن هم $f'(a)=0$ و هم $f(a)=0$.

۷ یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t)=\sqrt{t}+2t^2$ گرم است.

الف) جرم این توده باکتری در بازه زمانی $3 \le t \le 4$ چند گرم افزایش می‌یابد؟

ب) آهنگ رشد جرم توده باکتری در لحظه $t=3$ چقدر است؟

۸ گنجایش ظرفی ۴۰ لیتر مایع است. در لحظهٔ $t=0$ سوراخی در ظرف ایجاد می‌شود. اگر حجم مایع باقی‌مانده در ظرف پس از t ثانیه از رابطه $V=40\left(1-\frac{t}{10}\right)^2$ به‌دست آید:

الف) آهنگ تغییر متوسط حجم مایع در بازه زمانی $[0,1]$ چقدر است؟

ب) در چه زمانی، آهنگ تغییر لحظه‌ای حجم برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[0,10]$ می‌شود؟

فصل

۵ کاربرد مشتق

مشتق تابع، کاربردهای چشمگیری در حوزه‌های مختلف دارد. مسائل بهینه‌سازی یکی از این عرصه‌هاست که مشتق تابع به‌طور گسترده‌ای در آنها مورد استفاده قرار می‌گیرد. دامنهٔ این نوع مسائل از طراحی قطعات مختلف و شکل ظاهری انواع وسایل نقلیه تا مینیمم نمودن فاصله، زمان و هزینه و همچنین ماکزیمم کردن حجم، مساحت و سود، گسترده است.

درس اول — اکسترمم‌های تابع

درس دوم — بهینه‌سازی

درس اول

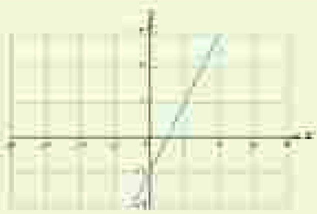
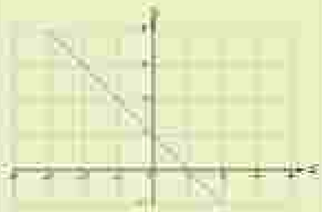
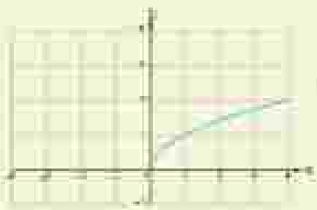
اکسترمم‌های تابع

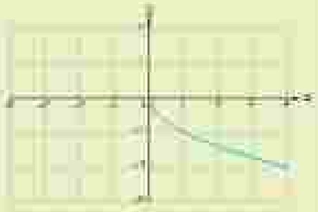
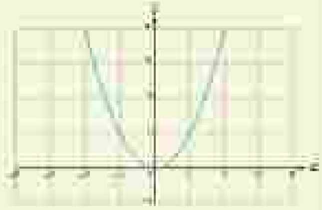
یکنوایی تابع و ارتباط آن با مشتق

در فصل اول، تعریف تابع صعودی و تابع نزولی را دیدیم. در اینجا می‌خواهیم ارتباط علامت مشتق یک تابع را با صعودی یا نزولی بودن آن تابع بررسی کنیم.

فعالیت

جدول زیر را در نظر بگیرید. در این جدول ضابطه و نمودار چند تابع ارائه شده است که از قبل با آنها آشنا هستیم. همچنین یکنوایی این تابع‌ها مورد بررسی قرار گرفته است. به علاوه، مشتق هر کدام از این تابع‌ها، تعیین علامت شده است. جدول را کامل کنید.

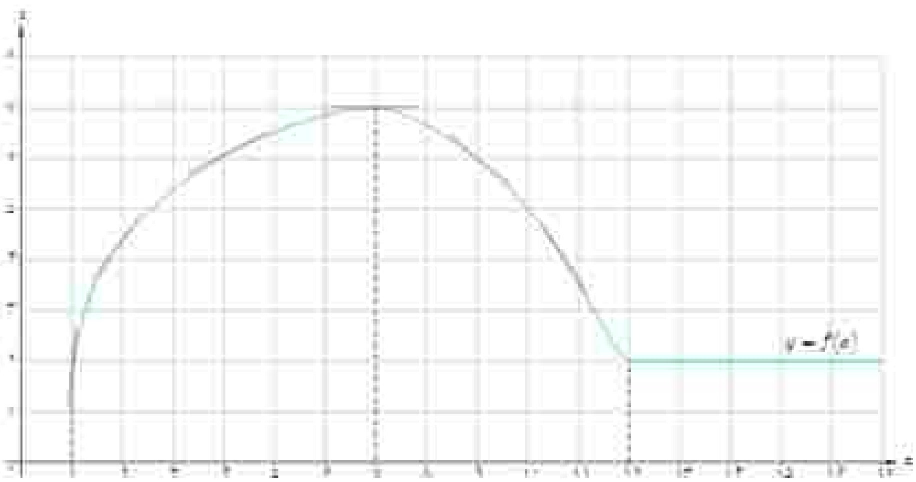
علامت مشتق	تابع مشتق	یکنوایی تابع	نمودار تابع	ضابطهٔ تابع
f' همواره مثبت است	$f'(x)=۲$	تابع f در $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است		$f(x)=۲x-۱$
g' همواره ... است	$g'(x)=-۱$	تابع g در $\mathbb{R}$ اکیداً ... است		$g(x)=-x+۱$
h' در $(۰,+\infty)$ ... است	$h'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}$	تابع h در $(۰,+\infty)$ اکیداً صعودی است		$h(x)=\sqrt{x}$

g' در $(0,+\infty)$ همواره	$g'(x)=\ldots$	تابع g در $(0,+\infty)$ اکیداً ..... است		$g(x)=-\sqrt{x}$
h' در $(-\infty,0)$ منفی و در $(0,+\infty)$ ..... است.	$h'(x)=2x$	تابع h در $(-\infty,0)$ اکیداً نزولی و در $(0,+\infty)$ اکیداً صعودی است		$h(x)=x^2$
				$l(x)=\ldots$

با بررسی جدول بالا، توضیح دهید که چه رابطه‌ای بین علامت مشتق تابع در یک بازه و یکنوایی تابع در آن بازه وجود دارد.

کار در کلاس

از فصل قبل می‌دانیم که مشتق هر تابع در یک نقطه، با شیب خط مماس بر نمودار تابع در آن نقطه برابر است. تابع زیر را درنظر بگیرید:



ملاحظه می‌شود که:

الف) در بازهٔ $(1,7)$ که f اکیداً صعودی است، شیب خط‌های مماس بر نمودار f، مثبت است؛ بنابراین در این بازه علامت f' ..... است.

ب) در بازهٔ $(7,12)$ که تابع اکیداً نزولی است، شیب خط‌های مماس بر نمودار f، ..... است؛ بنابراین در این بازه علامت f' ..... است.

پ) در بازه $(12,+\infty)$ که تابع، مقدار ثابت دارد، مقدار f' برابر ..... است.

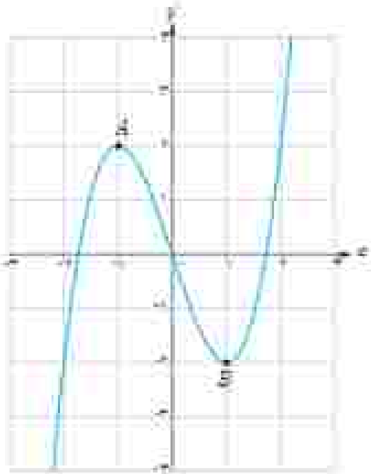
مطلب فوق برای توابع مشتق‌پذیر همواره درست است که آن را به شکل زیر بیان می‌کنیم :

آزمون یکنوایی تابع

الف) در یک بازه از دامنهٔ f اگر مقدار f' موجود و مثبت باشد، آنگاه f در آن بازه اکیداً صعودی است.

ب) در یک بازه از دامنهٔ f اگر مقدار f' موجود و منفی باشد، آنگاه f در آن بازه اکیداً نزولی است.

پ) در یک بازه از دامنهٔ f اگر مقدار f' موجود و برابر صفر باشد، آنگاه f در آن بازه تابعی ثابت است.



بنابراین برای مشخص کردن بازه‌های مربوط به صعودی بودن یا نزولی بودن تابع f، کافی است مانند مثال زیر، f' را تعیین علامت کنیم.

مثال[۱] : تابع $f(x) = x^۳ - ۳x$ در چه بازه‌هایی اکیداً صعودی و در کدام بازه‌ها اکیداً نزولی است؟

حل : f' را به‌دست آورده و آن را تعیین علامت می‌کنیم.

$$f'(x) = ۳x^۲ - ۳$$

$$f'(x) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۱ \\ x = ۱ \end{cases}$$

x	$-\infty$		-۱		۱		$+\infty$
بازه		$(-\infty , -۱)$		$(-۱ , ۱)$		$(۱ , +\infty)$	
علامت f'		+	۰	−	۰	+	
یکنوایی f	$-\infty$	اکیداً صعودی ↗	۲	اکیداً نزولی ↘	-۲	اکیداً صعودی ↗	$+\infty$

نمودار تابع f مربوط به مثال قبل را رسم کرده‌ایم. آن را با جدول مقایسه کنید.

اکسترمم‌های نسبی تابع

در نمودار این تابع، نقاط به طول ۱− و ۱ را که صفرهای تابع f' هستند مورد توجه قرار دهید. اهمیت این نقاط در این مثال از این جهت است که در هر یک از آنها، رفتار تابع از نظر صعودی یا نزولی بودن عوض شده است (جدول ملاحظه شود). اگر این دو نقطه را به ترتیب A و B بنامیم، آنگاه A نقطهٔ ماکزیمم نسبی f و B نقطهٔ مینیمم نسبی آن است.

۱ــ رسم نمودار تابع‌های درجه سوم در حالت کلی در زمرهٔ اهداف کتاب حاضر نیست.

تعریف: گوییم تابع f در نقطه‌ای به طول c ماکزیمم نسبی دارد، هرگاه یک همسایگی از c مانند $I \subseteq D_f$ باشد که برای هر $x \in I$ داشته باشیم $f(c) \geq f(x)$. در این حالت $f(c)$ مقدار ماکزیمم نسبی تابع f نامیده می‌شود.

همچنان که گفته شد، تابع مثال قبل در نقطهٔ $(-۱,۲)$ A ماکزیمم نسبی دارد و مقدار ماکزیمم نسبی تابع برابر ۲ می‌باشد. مینیمم نسبی به روش مشابه تعریف می‌شود.

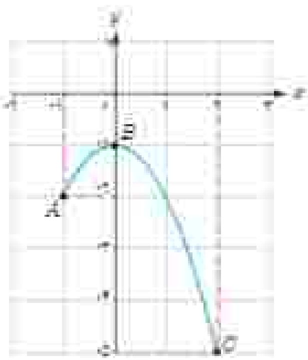
تعریف: گوییم تابع f در نقطه‌ای به طول c مینیمم نسبی دارد، هرگاه یک همسایگی از c مانند $I \subseteq D_f$ باشد که برای هر $x \in I$ داشته باشیم $f(c) \leq f(x)$. در این حالت $f(c)$ را مقدار مینیمم نسبی تابع f می‌نامیم.

در مثال قبل مقدار مینیمم نسبی تابع چقدر است؟

تذکر: نقاط ماکزیمم و مینیمم یک تابع را نقاط اکسترمم آن تابع هم می‌گوییم. در تابع مثال قبل، نقاط A و B اکسترمم‌های نسبی تابع هستند.

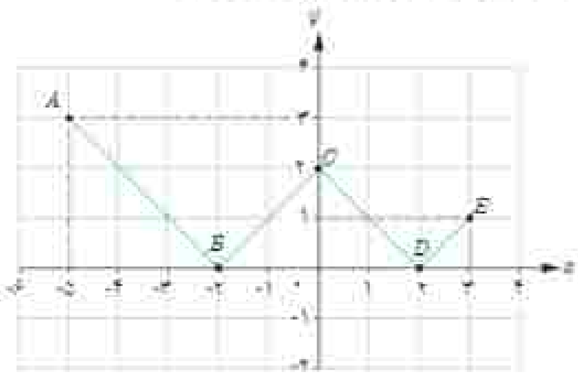
کار در کلاس

نوع اکسترمم‌های نسبی هر یک از توابع زیر را در نقاط مشخص شده تعیین کنید و جدول‌ها را کامل کنید.



ب) $g(x) = -x^2 - ۱ \quad x \in [-۱, ۲]$

نقطه	نوع اکسترمم نسبی	مقدار اکسترمم نسبی	مقدار مشتق
A	نقطه اکسترمم نسبی نیست	–	–
B	max نسبی	...	$f'(۰)$ برابر صفر است
C	...	–	–



الف) $f(x) = ||x| - ۲|, \ x \in [-۵, ۳]$

نقطه	نوع اکسترمم نسبی	مقدار اکسترمم نسبی	مقدار مشتق
A	نه max نسبی و نه min نسبی	–	–
B	min نسبی	۰	$f'(-۲)$ موجود نیست
C	...	۲	...
D	...	...	...
E	...	–	–

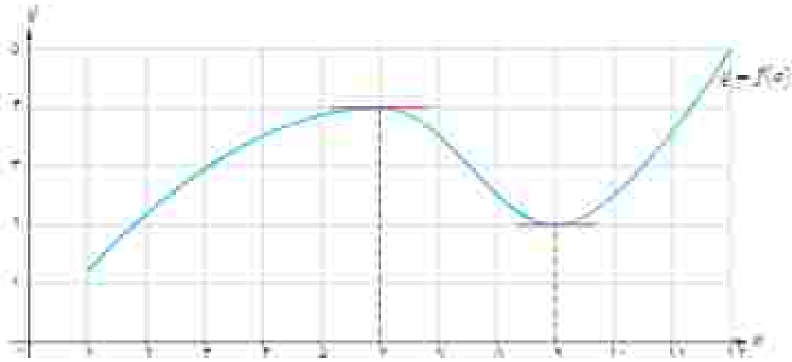
نقاط بحرانی تابع

حال این سؤال پیش می‌آید که در چه نقاطی از دامنهٔ تابع f باید به دنبال اکسترمم‌های نسبی آن باشیم؟ همان‌گونه که در تابع‌های قبلی دیده می‌شود، جواب عبارت است از **نقاطی از دامنهٔ f که f' در آنها تعریف نشده باشد و همچنین نقاطی که مقدار f' در آنها برابر صفر است**. به لحاظ اهمیت این دو دسته از نقاط، شایسته است که نامی برای خود داشته باشند؛ آنها را نقاط بحرانی تابع می‌نامیم :

> **تعریف :** نقطهٔ به طول c از دامنهٔ تابع f را یک نقطهٔ بحرانی برای این تابع می‌نامیم هرگاه $f'(c)$ برابر صفر باشد یا $f'(c)$ موجود نباشد.

نقاط ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی تابع زیر را درنظر بگیرید. دیده می‌شود که خط مماس بر نمودار f در این نقاط به صورت افقی، یعنی با شیب صفر است. از آنجا که مشتق تابع در یک نقطه، برابر شیب خط مماس بر منحنی تابع در آن نقطه است، لذا در این تابع داریم :

$f'(۶) = ۰ \quad , \quad f'(۹) = ۰$



این مطلب در مورد نقاط اکسترمم نسبی هر تابع مشتق‌پذیر، درست است. قضیه زیر را در این مورد بیان می‌کنیم.

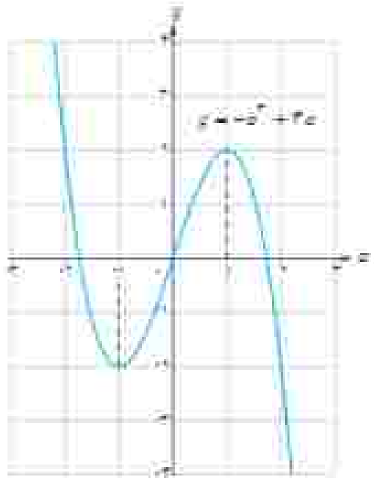
> **قضیه :** اگر تابع f در نقطهٔ به طول c ماکزیمم یا مینیمم نسبی داشته باشد و $f'(c)$ موجود باشد، آنگاه $f'(c)=۰$. به عبارت دیگر، هر نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع، یک نقطهٔ بحرانی آن است.

کار در کلاس

۱) الف) با رسم نمودار تابع $f(x)=|x-2|$، نشان دهید که f در $x=2$ مینیمم نسبی دارد.

ب) آیا $f'(2)$ موجود است؟ چرا؟

پ) آیا $x=2$ طول نقطهٔ بحرانی تابع است؟ چرا؟

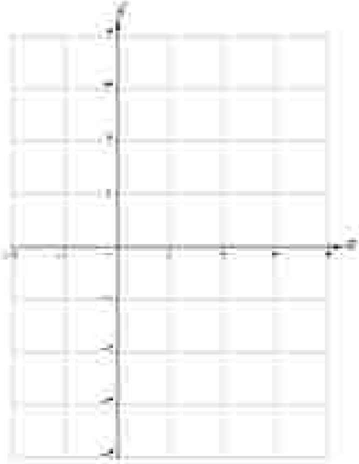


۲) نمودار تابع $f(x)=-x^3+3x$ را رسم کرده‌ایم.

الف) طول‌های نقاط اکسترمم نسبی f را تعیین کنید.

ب) می‌دانیم این تابع در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است. ریشه‌های معادلهٔ $f'(x)=0$، یعنی طول‌های نقاط بحرانی تابع را به‌دست آورید.

پ) با توجه به الف و ب، درستی قضیه قبل را در مورد این تابع بررسی کنید.



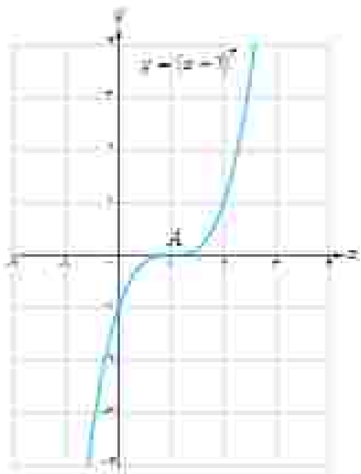
۳) تابع با ضابطهٔ $f(x)=-x^2+2x+2$ را در نظر بگیرید. f همواره مشتق‌پذیر است.

الف) $f'(x)$ را به‌دست آورید.

ب) ریشهٔ معادلهٔ $f'(x)=0$ را محاسبه کنید تا طول نقاط بحرانی تابع به دست آید.

پ) با رسم نمودار سهمی، تحقیق کنید که آیا نقطهٔ اکسترمم f منطبق بر نقطهٔ بحرانی آن است؟

از مثال‌های قبل، این سؤال مطرح می‌شود که آیا صفرهای تابع مشتق، همواره طول نقاط اکسترمم نسبی تابع را به‌دست می‌دهند؟ با وجود آنکه جواب این سؤال در مورد برخی از تابع‌های مورد بحث ما مثبت است، مثال زیر نشان می‌دهد که این مطلب همیشه هم درست نیست. به عبارت دیگر، عکس قضیه قبل در حالت کلی درست نیست.



مثال: به نمودار تابع $f(x)=(x-1)^3$ دقت کنید. تابع مشتق این تابع به‌صورت $f'(x)=3(x-1)^2$ است. با وجود آنکه مقدار $f'(x)$ در $x=1$ برابر صفر است، امّا با توجه به نمودار f، دیده می‌شود که نقطه به طول ۱ برای این تابع نه ماکزیمم نسبی است و نه مینیمم نسبی. دلیل این مطلب، آن است که f'، قبل و بعد از $x=1$ همواره مثبت است؛ به عبارت دیگر، f در $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است و لذا نمی‌تواند اکسترمم نسبی داشته باشد.

تذکر: مثال بالا نشان می‌دهد که عکس قضیهٔ قبل در حالت کلی درست نیست. در واقع نقطهٔ A به طول $x=1$ برای تابع $f(x)=(x-1)^3$ یک نقطهٔ بحرانی است، اما اکسترمم نسبی آن نیست. شما یک مثال نقض دیگر برای عکس این قضیه ارائه کنید که نشان دهد یک نقطهٔ بحرانی لزوماً اکسترمم نسبی نیست.

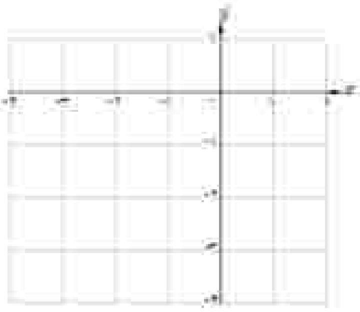
کار در کلاس

۱ جدول تغییرات تابع $f(x) = -x^2 - 2x$ در زیر آمده است که در آن با تعیین علامت f'، بازه‌هایی که تابع f در آنها صعودی است و همچنین بازه‌هایی که نزولی می‌باشد، تعیین شده است. همچنین، اکسترمم نسبی تابع در جدول مشخص شده است:

$f'(x) = -2x - 2$

$f'(x) = 0 \rightarrow x = -1$ طول نقطهٔ بحرانی

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
بازه		$(-\infty, -1)$		$(-1, +\infty)$	
علامت f'		+	۰	−	
یکنوایی f		صعودی اکید	۱	نزولی اکید	
	$-\infty$	↗	max نسبی	↘	$-\infty$



با توجه به جدول، مشخص است که نقطه به طول (-1)، ماکزیمم نسبی تابع است؛ چرا که رفتار تابع در این نقطه از صعودی اکید به نزولی اکید تغییر کرده است. با توجه به جدول و در صورت لزوم با یافتن نقاط دیگری از تابع، نمودار آن را رسم کنید.

۲ جدولی مشابه جدول بالا برای تابع $g(x) = x^3 - 3x$ رسم کنید که نقاط اکسترمم نسبی تابع در آن مشخص شده باشد.

مثال‌های بالا از توابع پیوسته، این مطلب را القا می‌کنند که تغییر رفتار این‌گونه تابع‌ها در یک نقطه از صعودی بودن به نزولی بودن، نشان‌دهندهٔ نقطهٔ ماکزیمم نسبی آن تابع است. برای مینیمم نسبی هم می‌توان مطلب مشابهی را بیان کرد که در ادامه آمده است.

آزمون مشتق اول

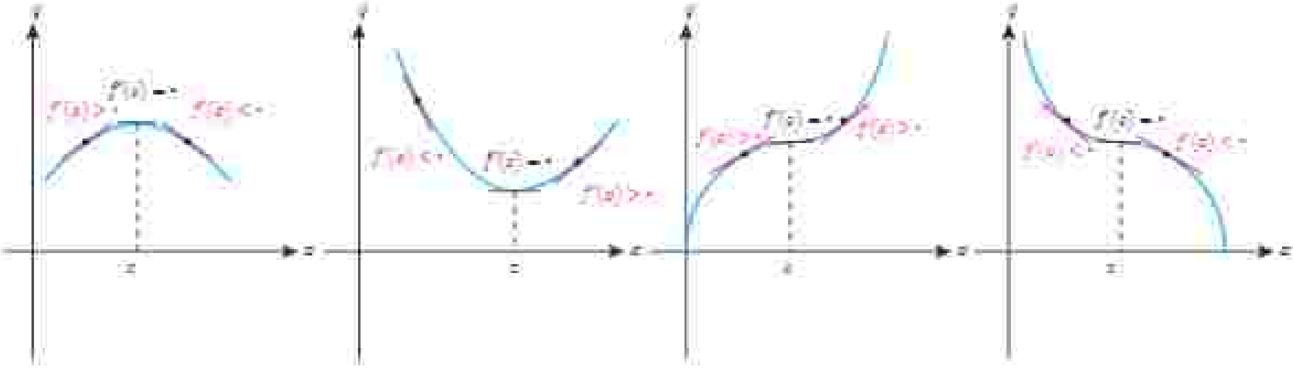
فرض کنیم c طول نقطهٔ بحرانی تابع f باشد که f در c پیوسته است و همچنین f در یک همسایگی محذوف c مشتق‌پذیر باشد.

الف) اگر علامت f' در $x = c$ از مثبت به منفی تغییر کند، آنگاه $x = c$ طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع f است.

ب) اگر علامت f' در $x = c$ از منفی به مثبت تغییر کند، آنگاه $x = c$ طول نقطهٔ مینیمم نسبی تابع f است.

پ) اگر f' در c تغییر علامت ندهد؛ به‌طوری که f' در یک همسایگی محذوف c همواره مثبت (یا همواره منفی) باشد، آنگاه f در c ماکزیمم یا مینیمم نسبی ندارد.

درستی آزمون مشتق اول را در همسایگی نقطهٔ a در هر یک از نمودارهای زیر مورد توجه قرار دهید.



$x=a$: نه طول ماکزیمم نسبی است و نه مینیمم نسبی

$x=a$: نه طول ماکزیمم نسبی است و نه مینیمم نسبی

$x=a$: طول مینیمم نسبی

$x=a$: طول ماکزیمم نسبی

اکسترمم‌های مطلق تابع

فعالیت

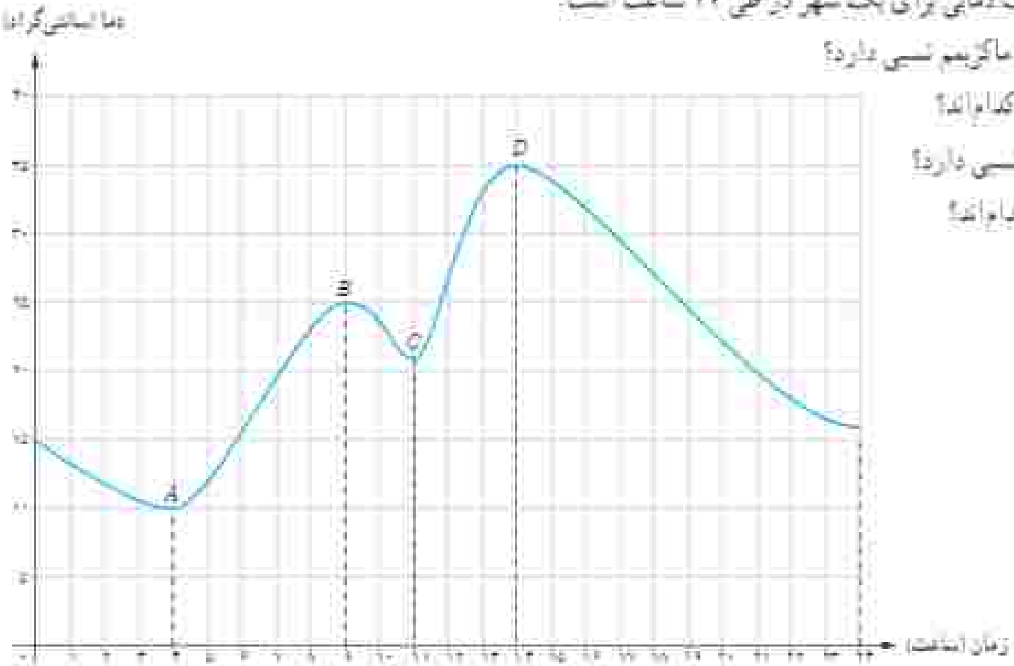
نمودار زیر نشان‌دهندهٔ تغییرات دمای برای یک شهر در طی ۲۴ ساعت است.

الف) تابع مقابل در چه نقاطی ماکزیمم نسبی دارد؟

ب) مقادیر ماکزیمم نسبی تابع کدام‌اند؟

پ) تابع در چه نقاطی مینیمم نسبی دارد؟

ت) مقادیر مینیمم نسبی تابع کدام‌اند؟



با توجه به نمودار، دیده می‌شود که دمای هوا در ساعت ۱۴ بیشترین مقدار و برابر با ۳۵ درجه سانتی‌گراد بوده است. در این حالت می‌گوییم، نقطهٔ $D(14,35)$ ماکزیمم مطلق تابع است و مقدار ماکزیمم مطلق تابع برابر ۳۵ می‌باشد. نقطهٔ مینیمم مطلق این تابع و همچنین مقدار مینیمم مطلق آن را بنویسید.

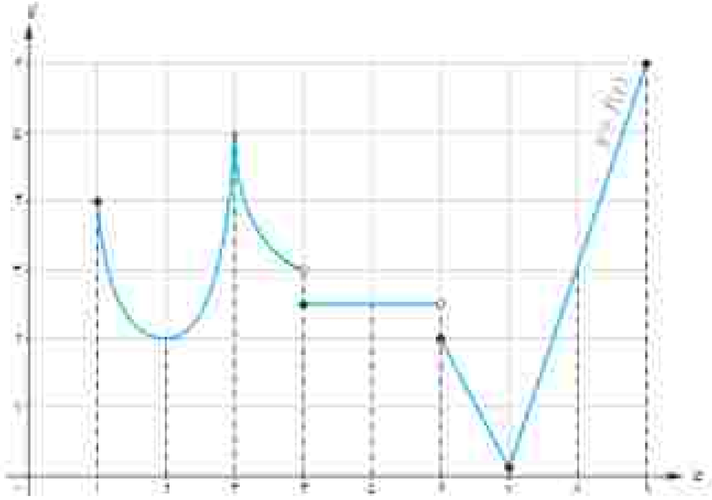
> **تعریف:** با فرض $c\in D_f$، نقطهٔ $(c\,,f(c))$، یک نقطهٔ ماکزیمم مطلق برای تابع f نامیده می‌شود، هرگاه به ازای هر x از D_f داشته باشیم $f(c)\geq f(x)$. در این حالت عدد $f(c)$ را مقدار ماکزیمم مطلق f روی D_f می‌نامیم.

> **تعریف:** با فرض $c\in D_f$، نقطهٔ $(c\,,f(c))$، یک نقطهٔ مینیمم مطلق برای تابع f نامیده می‌شود، هرگاه به ازای هر x از D_f داشته باشیم $f(c)\leq f(x)$. در این حالت عدد $f(c)$ را مقدار مینیمم مطلق f روی D_f می‌نامیم.

در تابع صفحهٔ قبل، اکسترمم‌های مطلق تابع f یعنی نقاط A و D، به ترتیب نقاط مینیمم مطلق و ماکزیمم مطلق تابع هستند.

کار در کلاس

۱ با تکمیل جدول زیر، اکسترمم‌های مطلق و نسبی تابع زیر و همچنین نقاط بحرانی آن را در نقاط مشخص شده تعیین کنید.

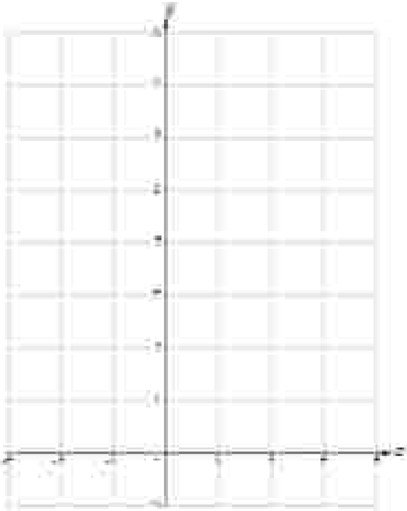


طول نقطه	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
max مطلق	×	×			×	×			✓
min مطلق	×	×			×	×			×
max نسبی	×	×			✓	×			×
min نسبی	×	✓			✓	×			×
نقطهٔ بحرانی	✓	✓			✓	✓			✓

۲ به کمک رسم نمودار تابع، مقادیر اکسترمم نسبی و مطلق تابع‌های زیر را در صورت وجود تعیین کنید.

الف) $f(x)=x^2\,;\,x\in[-2\,,1]$ ب) $g(x)=-x^2\,;\,x\in[-2\,,3]$ پ) $h(x)=\frac{1}{x}$

فعالیت



تابع $f(x)=|x^2-1|$ را در بازهٔ $[-2 , 3]$ رسم کنید و با توجه به نمودار، نقاط اکسترمم مطلق را تعیین کنید.

در فعالیت قبل دیده می‌شود که تابع پیوستهٔ $f(x)=|x^2-1|$ در بازهٔ بستهٔ $[-2 , 3]$ هم ماکزیمم مطلق دارد و هم مینیمم مطلق که این مطلب همواره درست است. همچنین مشاهده می‌شود که نقاط اکسترمم مطلق، در نقاط بحرانی تابع یا نقاط انتهایی بازه واقع‌اند. این موضوع نیز همواره درست است.

قضیه : فرض کنیم تابع f در بازهٔ بستهٔ $[a , b]$ پیوسته باشد. در این صورت f در این بازه هم ماکزیمم مطلق دارد و هم مینیمم مطلق.

قضیهٔ فوق، تنها وجود اکسترمم‌های مطلق توابع پیوسته را در بازه‌های بسته تضمین می‌کند و به روش یافتن این نقاط اشاره‌ای ندارد. مراحل یافتن اکسترمم‌های مطلق تابع پیوستهٔ f در بازهٔ بستهٔ $[a , b]$ به شرح زیر است :

۱ـ مشتق تابع را به دست آورده و نقاط بحرانی f را می‌یابیم.
۲ـ مقدار تابع را در هر یک از نقاط بحرانی و همچنین در نقاط انتهایی بازه محاسبه می‌کنیم.
۳ـ در مرحلهٔ ۲، بزرگ‌ترین عدد به دست آمده، مقدار ماکزیمم مطلق تابع و کوچک‌ترین آنها مینیمم مطلق تابع در بازهٔ $[a , b]$ است.

مثال : نقاط اکسترمم مطلق تابع $f(x)=2x^3+3x^2-12x$ را در بازهٔ $[-1 , 3]$ تعیین کنید.

حل : ابتدا به کمک f'، نقاط بحرانی تابع را به‌دست می‌آوریم.

$$f'(x)=6x^2+6x-12$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow x^2+x-2=0$$

$$\Rightarrow (x+2)(x-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=1 \end{cases}$$

ـ بنابراین نقاط به طول ۱-، ۱، ۳، نقاط بحرانی بازهٔ $[-1 , 3]$ است.

x	۱-	۱	۳
$f(x)$	۱۳	۷-	۴۵

با توجه به جدول، دیده می‌شود که بزرگ‌ترین مقدار برای تابع در بازهٔ $[-1 , 3]$ برابر ۴۵ و کوچک‌ترین مقدار، مساوی ۷- است. به همین دلیل، این دو مقدار به ترتیب مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع در این بازه‌اند.

تمرین

۱ بزرگ‌ترین بازه از $\mathbb{R}$ که تابع $f(x)=x^3-12x+4$ در آن نزولی اکید باشد، کدام است؟ چرا؟

۲ با تشکیل جدول تغییرات تابع $g(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$، مشخص کنید تابع در چه بازه‌هایی صعودی اکید و در کدام بازه‌ها نزولی اکید است؟

۳ نقاط بحرانی توابع زیر را در صورت وجود به‌دست آورید.

الف) $f(x)=\sqrt{9-x^2}$ ب) $g(x)=x^3+3x^2-4$ پ) $h(x)=\sqrt[3]{x}$

۴ در هر یک از توابع زیر، ابتدا نقاط بحرانی تابع را به دست آورید و سپس با رسم جدول تغییرات تابع، نقاط ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید.

الف) $f(x)=x^3+3x^2-9x-10$ ب) $g(x)=-2x^3+3x^2+12x-9$ پ) $h(x)=-x^3-3x+2$

۵ مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق توابع زیر را در بازه‌های مشخص شده، در صورت وجود به دست آورید.

الف) $f(x)=-2x^3+9x^2-12 \quad ; \quad x\in[-1,4]$

ب) $g(x)=x^2+2x-5 \quad ; \quad x\in[-2,1]$

۶ اگر نقطهٔ (۱ , ۲)، نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع $f(x)=x^3+ax^2+b$ باشد، مقادیر a و b را به دست آورید.

۷ نمودار تابعی مانند f با دامنه $\mathbb{R}$ را رسم کنید به طوری که هر نقطهٔ دلخواه از D_f، یک نقطهٔ بحرانی f باشد. مسئله چند جواب دارد؟

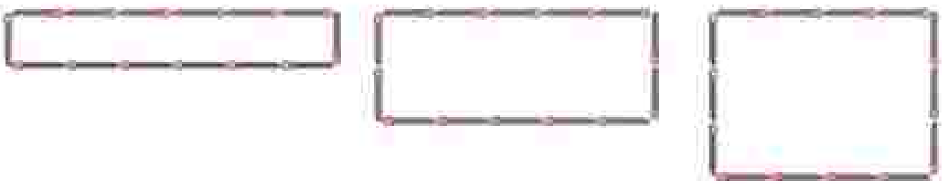
درس دوم

بهینه‌سازی

افراد در طول روز کارهای بسیاری انجام می‌دهند؛ به جاهای مختلفی می‌روند، از وسایل متنوعی استفاده می‌کنند، خرید می‌کنند، درس می‌خوانند و … . در تمام این فعالیت‌ها، هدف آن است که بهترین تصمیم‌ها اتخاذ گردند. به‌عنوان مثال، مدیر یک شرکت تولیدی همواره به دنبال آن است که بیشترین سود را با صرف کمترین هزینه کسب نماید. یا اینکه یک باغدار را درنظر بگیرید که با استفاده از روش های نوین کشاورزی، درصدد آن است که با صرف کمترین هزینه، بیشترین مقدار محصول را از واحد سطح برداشت کند. چنین مسئله‌هایی در زمرهٔ مسائل بهینه‌سازی هستند که برخی از آنها به کمک مشتق قابل حل‌اند. در اینجا مسائلی را با هدف ماکزیمم کردن مساحت، حجم، سود یا مینیمم کردن فاصله، زمان و هزینه بررسی خواهیم کرد.

فعالیت

۱ فرض کنید ۱۴ چوب کبریت در اختیار داشته باشیم و طول هرکدام از آنها را یک واحد درنظر بگیریم. با استفاده از همهٔ این چوب‌کبریت‌ها، مستطیل می‌سازیم. نتیجهٔ کار در سه حالت مختلف در شکل زیر آمده است:



الف) در هر سه حالت، محیط مستطیل‌ها ثابت و برابر .... واحد است.

ب) در این مستطیل‌های هم‌محیط، دیده می‌شود که مساحت‌ها برابر نیستند و به ترتیب برابر ۶، ۱۰ و ...... واحد مربع هستند.

پ) مشاهده می‌شود که هرچقدر اندازهٔ طول و عرض یک مستطیل به هم نزدیک‌تر می‌شود، مساحت آن .... می‌یابد.

۲ جدول زیر را مورد توجه قرار دهید که در آن ابعاد و مساحت چند مستطیل با محیط ۱۴ واحد آمده است.

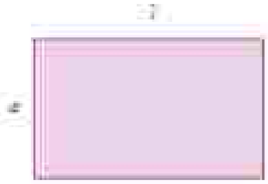
ابعاد مستطیل	۰/۵×۶/۵	۱×۶	۲×۵	۲/۵×۴/۵	۳×۴	۳/۲×۳/۸	...
محیط مستطیل	۱۴	۱۴	۱۴	۱۴	۱۴	۱۴	۱۴
مساحت	۳/۲۵	۶	۱۰	۱۱/۲۵	۱۲	۱۲/۱۶	...

الف) در این جدول، بزرگ‌ترین عددی که برای مساحت مستطیل دیده می‌شود، ۱۲/۱۶ است. اگر برای طول و عرض مستطیل تنها به اعداد طبیعی محدود نباشیم، آیا می‌توانید مستطیل دیگری با محیط ۱۴ واحد ارائه کنید که مساحت آن از عدد ۱۲/۱۶ واحد مربع هم بزرگ‌تر باشد؟

ب) برای حالتی که مساحت مستطیل بزرگ‌ترین مقدار ممکن می‌شود، چه حدسی می‌زنید؟

درستی نتیجه‌ای را که در این فعالیت حدس زدیم، در مثال بعد با استفاده از مشتق بررسی می‌کنیم.

مثال ۱: نشان دهید در بین تمام مستطیل‌های با محیط ثابت ۱۴ سانتی‌متر، مستطیلی بیشترین مساحت را دارد که طول و عرض آن هم اندازه باشند.



حل: فرض کنیم ابعاد مستطیل x و l باشند. کمیتی که قرار است ماکزیمم شود، مساحت مستطیل است:

$S = x.l$ (۱)

برای آنکه S به‌صورت تابعی از x بیان شود، می‌توانیم l را برحسب x بدست آوریم:

محیط مستطیل: $P = ۱۴$

$۲(x + l) = ۱۴ \Rightarrow x + l = ۷ \Rightarrow l = ۷ - x$ (۲)

با جایگذاری رابطهٔ (۲) در (۱) خواهیم داشت:

$S(x) = x(۷ - x)$

$S(x) = -x^2 + ۷x \quad , \quad x \in [۰,۷]$

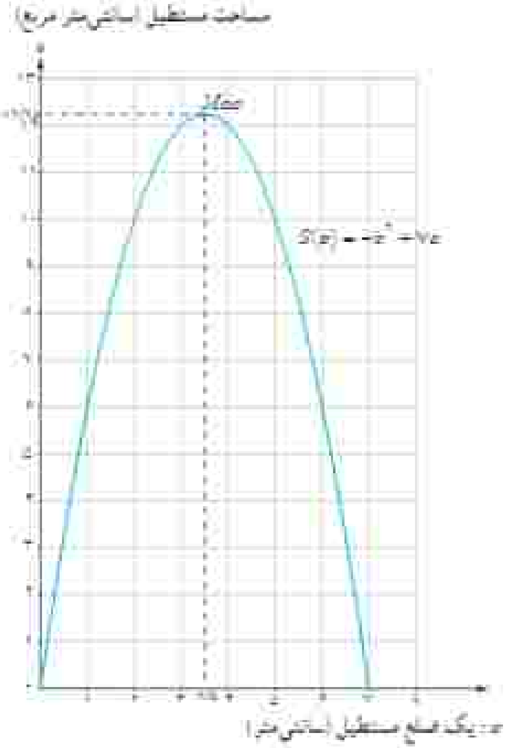
S در بازهٔ $(۰,۷)$ مشتق‌پذیر است، بنابراین برای یافتن نقاط بحرانی آن کافی است ریشهٔ معادلهٔ $S'(x) = ۰$ را بیابیم.

$S'(x) = ۰ \Rightarrow -۲x + ۷ = ۰ \Rightarrow x = ۳/۵$

بنابراین نقاط به طول ۳/۵ ، ۷ ، ۰ ، نقاط بحرانی بازهٔ $[۰,۷]$ است.

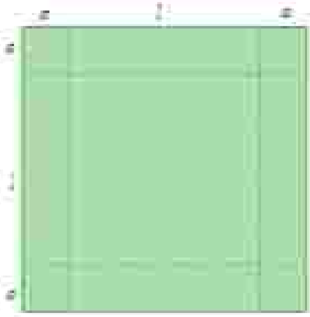
جدول تغییرات تابع S در بازهٔ موردنظر به شکل زیر است:

x	۰		۳/۵		۷
$S'(x) = -۲x + ۷$		+	۰	−	
$S(x) = -x^2 + ۷x$	۰	↗	۱۲/۲۵ ماکزیمم مطلق	↘	۰



از جدول دیده می‌شود که بیشترین مقدار مساحت، ۱۲/۲۵ سانتی‌متر مربع است و این مقدار زمانی حاصل می‌شود که طول و عرض مستطیل هم اندازه و مساوی ۳/۵ سانتی‌متر باشند؛ یعنی یک مربع به ضلع ۳/۵ سانتی‌متر داشته باشیم. نمودار تابع S نیز رسم شده است. به نقطهٔ ماکزیمم S در نمودار آن توجه کنید.

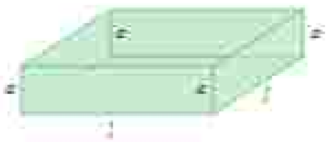
تذکر: در مثال قبل، تابعی که به دنبال مقدار اکسترمم مطلق آن بودیم، یک تابع درجه ۲ بود. از پایه‌های قبل هم می‌دانستیم که نقطهٔ $(\frac{-b}{۲a}, \frac{-\Delta}{۴a})$، نقطهٔ اکسترمم تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ را بدست می‌دهد. اما همیشه تابع‌های موردنظر، درجه ۲ نیستند. با این حال، مراحل کار مشابه مثال قبل خواهد بود. مثال‌های بعد را مورد توجه قرار دهید.



مثال ۲ : ورق فلزی مربع شکلی به طول ضلع $۳۰\ cm$ را در نظر بگیرید. مطابق شکل می‌خواهیم از چهارگوشه آن مربع‌های کوچکی به ضلع x برش بزنیم و آنها را کنار بگذاریم. سپس با تا کردن ورق در امتداد خط‌چین‌های مشخص شده در شکل، یک جعبهٔ درباز بسازیم. مقدار x چقدر باشد تا حجم قوطی، حداکثر مقدار ممکن گردد؟

حل : ارتفاع مکعب حاصل مساوی x است. طول و عرض قاعدهٔ آن را با l نمایش می‌دهیم. آنچه قرار است ماکزیمم شود، مقدار حجم مکعب مستطیل است : $V = x.l^۲$

باید l را برحسب x در این رابطه قرار دهیم تا V تابعی یک متغیره از x شود.



$$۲x + l = ۳۰ \Rightarrow l = ۳۰ - ۲x \Rightarrow V = x(۳۰ - ۲x)^۲$$

$$V(x) = x(۹۰۰ - ۱۲۰x + ۴x^۲) \Rightarrow V(x) = ۴x^۳ - ۱۲۰x^۲ + ۹۰۰x \ ,\ x \in [۰,۱۵]$$

نقاط بحرانی تابع $V(x)$ را به‌دست می‌آوریم :

$$V'(x) = ۰ \Rightarrow ۱۲x^۲ - ۲۴۰x + ۹۰۰ = ۰ \Rightarrow x^۲ - ۲۰x + ۷۵ = ۰$$

$$\Rightarrow (x-۵)(x-۱۵) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۵ \\ x = ۱۵ \end{cases}$$

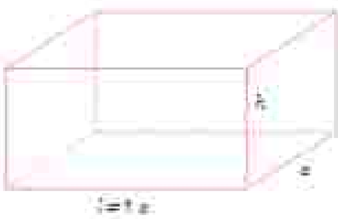
بنابراین نقاط به طول ۵، ۰، ۱۵، نقاط بحرانی بازهٔ $[۰,۱۵]$ است.

جدول تغییرات تابع V در بازهٔ موردنظر به‌صورت زیر است :

x	۰		۵		۱۵
$V'(x) = ۱۲x^۲ - ۲۴۰x + ۹۰۰$		+	۰	−	۰
$V(x)$	۰	↗	۲۰۰۰ ماکزیمم مطلق	↘	۰

با توجه به جدول، بیشترین حجم ممکن برای مکعب مستطیل موردنظر، $۲۰۰۰\ (cm^۳)$ است که به ازای $x = ۵\ (cm)$ حاصل می‌شود.

مثال ۳ : می‌خواهیم مخزنی به شکل مکعب مستطیل درباز بسازیم که حجم آن $۱۰\ m^۳$ بوده و طول کف مخزن دو برابر عرض آن باشد. قیمت مصالح مورد نیاز جهت کف این مخزن برای هر متر مربع ۱۰۰ هزار تومان و این قیمت برای دیواره‌ها در هر متر مربع ۶۰ هزار تومان است. عرض کف مخزن چقدر باشد تا هزینهٔ مصالح مصرف شده کمترین مقدار ممکن گردد؟



حل : لازم است هزینهٔ مصالح مصرف شده کمترین مقدار ممکن شود. تابع هزینه را به شکل زیر می‌توان نوشت :

$$C = ۱۰۰(x.l) + ۶۰[۲xh + ۲lh]$$
$$= ۱۰۰xl + ۱۲۰h(x + l)$$
$$= ۱۰۰x(۲x) + ۱۲۰h(x + ۲x)$$
$$C = ۲۰۰x^۲ + ۳۶۰xh \quad (۱)$$

لازم است که C را به شکل تابعی یک متغیره از x بنویسیم.

حجم مخزن : $V = ۱۰(m^۳) \Rightarrow x.l.h = ۱۰ \Rightarrow x(۲x)h = ۱۰ \Rightarrow h = \frac{۵}{x^۲} \quad (۲)$

با جایگذاری رابطهٔ (۲) در (۱) خواهیم داشت:

$$C(x)=200x^2+360x\left(\frac{5}{x^2}\right) \qquad \Rightarrow \qquad C(x)=200x^2+\frac{1800}{x} \quad x\in(0,+\infty)$$

نقطهٔ بحرانی تابع $C(x)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$C'(x)=0\Rightarrow 400x+\frac{-1800}{x^2}=0\Rightarrow \frac{400x^3-1800}{x^2}=0\Rightarrow 400x^3-1800=0\Rightarrow x^3=\frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow x=\sqrt[3]{4.5}=1.65(m) \quad \text{(نقطهٔ بحرانی تابع } C\text{)}$$

برای رسم جدول تغییرات تابع C، لازم است مشتق آن یعنی $C'(x)=\frac{400x^3-1800}{x^2}$ را تعیین علامت کنیم. علامت C' در هر بازه، همان علامت صورت مشتق یعنی ($400x^3-1800$) است. چرا؟

x	0		$\sqrt[3]{4.5}$		$+\infty$
$C'(x)$		$-$	0	$+$	
$C(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\simeq 1635$ مینیمم مطلق C	$\nearrow$	$+\infty$

از جدول دیده می‌شود که اگر عرض قاعدهٔ مخزن برابر $\sqrt[3]{4.5}=1.65(m)$ انتخاب شود، هزینه مصالح کمترین مقدار ممکن و حدود ۱۶۳۵ (برحسب هزار تومان)، یعنی ۱،۶۳۵،۰۰۰ تومان خواهد شد.

مثال ۴: غلظت یک داروی شیمیایی در خون، t ساعت پس از تزریق در ماهیچه از رابطهٔ $C(t)=\frac{3t}{t^3+27}$ به‌دست می‌آید. چند ساعت پس از تزریق این دارو، غلظت آن در خون، بیشترین مقدار ممکن خواهد بود؟

حل: ابتدا نقاط بحرانی تابع C را به‌دست می‌آوریم.

$$C'(t)=\frac{3(t^3+27)-3t^2(3t)}{(t^3+27)^2}$$

$$C'(t)=0\Rightarrow 3(t^3+27)-9t^3=0\Rightarrow (t^3+27)-3t^3=0\Rightarrow t^3=\frac{27}{2}$$

$$\Rightarrow t=\frac{3}{\sqrt[3]{2}}=2.38 \ \text{(ساعت)} \qquad \text{(نقطهٔ بحرانی تابع } C\text{)}$$

در $C'(t)$، علامت مخرج همواره مثبت است، پس علامت $C'(t)$ در واقع همان علامت صورت مشتق خواهد بود. بنابراین، جدول تغییرات تابع C به شکل زیر است:

t	0		$\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$		$+\infty$
$C'(t)$		$+$	0	$-$	
$C(t)$	0	$\nearrow$	$\simeq 0.18$ ماکزیمم مطلق C	$\searrow$	0

با توجه به جدول، دیده می‌شود که $\frac{3}{\sqrt[3]{2}}=2.38$ ساعت پس از تزریق، میزان غلظت دارو در خون، حداکثر میزان ممکن خواهد بود.

مثال ۵ : آرتا درون قایقی در نقطهٔ P قرار دارد که فاصلهٔ آن از نزدیک‌ترین نقطهٔ ساحل یعنی نقطهٔ A، معادل ۳ کیلومتر است. او می‌خواهد به نقطهٔ B در ساحل برسد که در ۸ کیلومتری A قرار دارد. فرض کنید سرعت حرکت قایق ۲ km/h و سرعت پیاده‌روی آرتا در ساحل ۴ km/h باشد. اگر او بخواهد در کوتاه‌ترین زمان ممکن به B برسد، در چه نقطه‌ای از ساحل باید پیاده شده و به‌سوی B پیاده‌روی کند؟

حل : نقطه‌ای از ساحل را که آرتا پیاده می‌شود، D می‌نامیم. می‌دانیم اگر x مسافت طی شده با سرعت ثابت v در مدت زمان t باشد، رابطهٔ $x=vt$ یا معادل آن $t=\frac{x}{v}$ برقرار است. بنابراین:

$$t_1=\frac{PD}{۲}=\frac{۱}{۲}\sqrt{x^۲+۹}\ :\ \text{زمان پارو زدن مسیر } P \text{ تا } D$$

$$t_2=\frac{DB}{۴}=\frac{۸-x}{۴}=۲-\frac{۱}{۴}x\ :\ \text{زمان پیاده‌روی مسیر } D \text{ تا } B$$

$$t=t_1+t_2\ :\ \text{زمان کل رسیدن از } P \text{ به } B$$

$$t(x)=\frac{۱}{۲}\sqrt{x^۲+۹}+(۲-\frac{۱}{۴}x) \qquad x\in[۰,۸]$$

به دنبال یافتن مقدار مینیمم مطلق t هستیم. نقطهٔ بحرانی t را به‌دست می‌آوریم.

$$t'(x)=\frac{۱}{۲}\times\frac{۲x}{۲\sqrt{x^۲+۹}}-\frac{۱}{۴}=\frac{۲x-\sqrt{x^۲+۹}}{۴\sqrt{x^۲+۹}}$$

$$t'(x)=۰\Rightarrow ۲x-\sqrt{x^۲+۹}=۰\Rightarrow ۴x^۲=x^۲+۹\Rightarrow x=\sqrt{۳}=۱/۷۳(\text{km})$$

بنابراین نقاط به طول $\sqrt{۳}$، ۰، ۸، نقاط بحرانی بازهٔ $[۰,۸]$ است.

جدول تغییرات $t(x)$ به‌صورت زیر است:

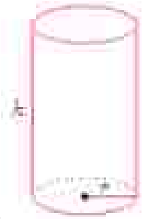
x	۰		$\sqrt{۳}$		۸
$t'(x)$		−	۰	+	
$t(x)$ برحسب ساعت	۳/۵	↘	$\frac{۸+۳\sqrt{۳}}{۴}=۳/۳$ مینیمم مطلق t	↗	$\frac{\sqrt{۷۳}}{۲}=۴/۲۷$

از جدول ملاحظه می‌شود که اگر x یعنی فاصله D از A، برابر $\sqrt{۳}=۱/۷۳$ کیلومتر انتخاب شود، زمان رسیدن آرتا از P به B کمترین زمان ممکن یعنی تقریباً ۳/۳ ساعت معادل سه ساعت و ۱۸ دقیقه خواهد بود.

کار در کلاس

۱ می‌خواهیم یک قوطی فلزی استوانه‌ای شکل و در باز بسازیم که گنجایش آن دقیقاً یک لیتر باشد. ابعاد قوطی چقدر باشد تا مقدار فلز به‌کار رفته در تولید آن مینیمم شود.

حل: باید مساحت کل استوانه کمترین مقدار ممکن گردد.



حجم استوانه $1(\text{lit}) = 1000\,\text{cm}^3$

$\Rightarrow \pi r^2 h = 1000(\text{cm}^3) \Rightarrow h = \frac{1000}{\pi r^2}$

مساحت کل استوانه : $S =$ مساحت قاعده + سطح جانبی

$$S(r) = \pi r^2 + 2\pi r h \Rightarrow S(r) = \pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{1000}{\pi r^2}\right) \Rightarrow S(r) = \pi r^2 + \frac{2000}{r}$$

با یافتن نقطهٔ بحرانی S و تشکیل جدول تغییرات آن، مشخص کنید که به ازای چه مقداری از r، مقدار $S(r)$ مینیمم می‌گردد.

۲ هزینهٔ سوخت یک قطار در هر ساعت برای حرکت با سرعت v کیلومتر بر ساعت، برابر $32v^2$ تومان است. همچنین سایر هزینه‌ها برای هر ساعت، صرف‌نظر از سرعت قطار، برابر ۸۰۰۰۰ تومان می‌باشد. قطار با چه سرعتی حرکت کند تا هزینهٔ آن در یک کیلومتر، کمترین مقدار ممکن باشد.

حل: اگر قطار با سرعت ثابت v کیلومتر بر ساعت حرکت کند، داریم:

هزینهٔ t ساعت حرکت: $C = 80000t + (32v^2)t$

هزینهٔ x کیلومتر حرکت: $C = 80000\left(\frac{x}{v}\right) + (32v^2)\left(\frac{x}{v}\right)$

هزینهٔ ۱ کیلومتر حرکت: $C(v) = \frac{80000}{v} + 32v$

نقطهٔ بحرانی تابع C را بیابید و با تشکیل جدول تغییرات آن، سرعت بهینه را پیدا کنید.

۳ دو عدد حقیقی بیابید که تفاضل آنها ۱۰ باشد و حاصل ضربشان کمترین مقدار ممکن گردد.

۴ در برخی بناهای تاریخی کشورمان پنجره‌هایی وجود دارد که به شکل یک مستطیل و نیم‌دایره‌ای بر روی آن می‌باشد به‌طوری که قطر نیم‌دایره برابر با پهنای مستطیل است. اگر محیط یک چنین پنجره‌ای ۴/۵ متر باشد، ابعاد آن را طوری بیابید که بیشترین نوردهی را داشته باشد.

حل: باید مساحت پنجره بیشترین مقدار ممکن باشد.

$$\text{محیط} = ۴/۵ \Rightarrow ۲h + x + \frac{۱}{۲}(۲\pi r) = \frac{۹}{۲}$$

$$\Rightarrow ۲h + ۲r + \pi r = \frac{۹}{۲} \rightarrow h = \frac{۹}{۴} - r - \frac{\pi r}{۲}$$

مساحت نیم‌دایره + مساحت مستطیل = S : مساحت پنجره

$$S = xh + \frac{۱}{۲}(\pi r^۲) \Rightarrow S(r) = ۲r(\frac{۹}{۴} - r - \frac{\pi r}{۲}) + \frac{۱}{۲}\pi r^۲ \Rightarrow S(r) = -(\frac{\pi + ۴}{۲})r^۲ + \frac{۹}{۲}r$$

با پیدا کردن نقطهٔ بحرانی S و تشکیل جدول تغییرات آن، مشخص کنید که به ازای چه مقداری از r، مقدار $S(r)$ بیشترین مقدار ممکن می‌شود.

دبیرستان ماندگار حکیم نظامی، اولین دبیرستان قم ثبت شده در فهرست آثار ملی ایران (تأسیس: ۱۳۱۷، مساحت: ۲/۵ هکتار)

تمرین

۱ کشاورزی می‌خواهد دور یک مزرعه مستطیل شکل به مساحت ثابت ۱۰۰۰۰ متر مربع را دیوارکشی کند. هزینه هر متر دیوارهای شمالی و جنوبی ۲ میلیون تومان و هزینه هر متر دیوارهای شرقی و غربی ۸ میلیون تومان است.

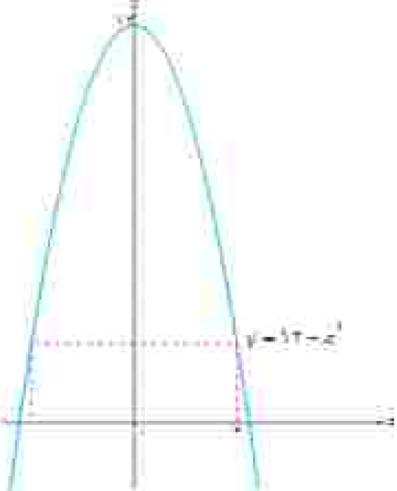
الف) هزینه مورد نیاز برای انجام این کار را به صورت یک تابع بنویسید.

ب) ابعاد مزرعه چقدر باشند تا هزینه دیوارکشی به حداقل مقدار ممکن برسد؟

۲ الف) می‌خواهیم کنار رودخانه یک محوطه به شکل مثلث متساوی‌الساقین را نرده‌کشی کنیم به طوری که قاعدهٔ مثلث منطبق بر رودخانه باشد. اگر تنها هزینه ۱۰۰ متر نرده را در اختیار داشته باشیم، در این‌صورت بیشترین مساحت ممکن برای این مثلث چقدر خواهد بود؟

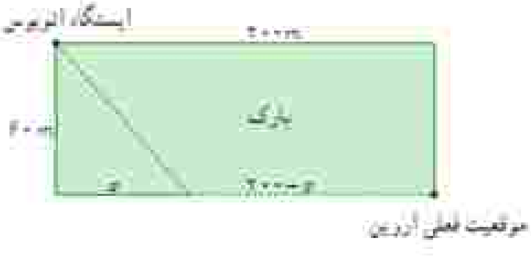
ب) بدون استفاده از مشتق نیز، این مسئله را حل کنید.

۳ ابعاد مستطیلی با بیشترین مساحت را تعیین کنید که دو رأس آن روی محور xها و دو رأس دیگرش بالای محور xها و روی سهمی $y=12-x^2$ باشند.



۴ هر صفحهٔ مستطیل شکل از یک کتاب جیبی، شامل یک متن با مساحت ثابت $32\,cm^2$ خواهد بود. هنگام طراحی قطع این کتاب، لازم است حاشیه‌های بالا و پایینی هر صفحه $2\,cm$ و حاشیه‌های کناری هر کدام یک سانتی‌متر در نظر گرفته شوند. ابعاد صفحه را طوری تعیین کنید که مساحت هر صفحه از کتاب کمترین مقدار ممکن باشند.

۵ آروین می‌خواهد به ایستگاه اتوبوسی برود که در ۴۰۰ متری غرب و ۶۰ متری شمال موقعیت فعلی او بعد از پارک قرار دارد. او می‌تواند با سرعت ۳ متر بر ثانیه از پیاده‌رو کنار پارک به سمت غرب برود. همچنین، می‌تواند از درون پارک و تنها با سرعت $2\,m/s$ عبور کند. با توجه به شکل، مقدار x را طوری تعیین کنید که او در کمترین زمان ممکن به ایستگاه برسد.



فصل ۶

هندسه

شهر گور اولین شهر دایره‌ای در ایران و یکی از نخستین شهرهای دایره‌ای در جهان، در نزدیکی فیروزآباد فارس واقع شده است. قدمت این شهر باستانی به دورهٔ هخامنشیان می‌رسد. طرح و الگوی این شهر دایره‌ای به قطر دو کیلومتر و دارای چهار دروازهٔ اصلی بوده و بناهای حکومتی و محل اقامت درباریان در آن قرار داشته است. پس از اسلام، اعراب این شهر را جور تلفظ می‌کردند و مورخان قدیم این واژه را دشت یا گودال معنی کرده‌اند. به نقل از تاریخ طبری، اردشیر بنای این شهر را در حدود ۲۲۴ میلادی و به نشانهٔ قدرت‌نمایی در برابر آخرین شاه اشکانی آغاز کرده است.

درس اوّل

تفکر تجسمی و آشنایی با مقاطع مخروطی

برای دوستتان توصیف کنید که خانه‌تان چه شکلی است. تصور کنید یک نفر با یک جرثقیل بزرگ سقف را برداشته است. در این صورت خانهٔ شما چه شکلی بود؟

به مسیری که هر روز از خانه تا مدرسه طی می‌کنید فکر کنید. آیا می‌توانید این مسیر را با رسم یک تصویر مناسب توضیح دهید؟

در حالت‌های بالا شما به موضوعی فکر کردید، اما از عبارات، جملات و شیوه‌های زبانی برای تفکر استفاده نکردید. در واقع به جای کلمات، تصاویری در ذهن شما نقش بستند و این تصویرسازی ذهنی، به شما کمک کرد که به آن موضوع یا موقعیت فکر کنید. این شیوه از تفکر را **تفکر تجسمی** می‌نامیم.

فرایند تفکر تجسمی، مستلزم تشکیل و دست‌ورزی تصاویر با قلم و کاغذ، فناوری و یا به صورت ذهنی است که به بررسی، کشف و درک مفاهیم منجر می‌شود. این نوع از تفکر، نقش مهمی در حل مسئله‌های ریاضی و همین‌طور حل مسائل در زندگی روزمره دارد.

موقعیت‌هایی که می‌توانند به تقویت تفکر تجسمی کمک کنند عبارت‌اند از: تجسم ذهنی یک جسم پس از چرخاندن آن در فضا، ترسیم سطح گستردهٔ اجسام هندسی و ترسیم یک جسم سه بعدی روی سطح، ترسیم نماهای مختلف اجسام، دوران شکل حول یک نقطه یا حول یک محور در صفحه و فضا و تجسم اجسام هندسی بعد از برش. از آنجا که هدف کلی این درس آشنایی با مقاطع مخروطی است، از بین این موقعیت‌ها، دوران اشکال هندسی حول یک محور و برش اجسام را بررسی می‌کنیم.

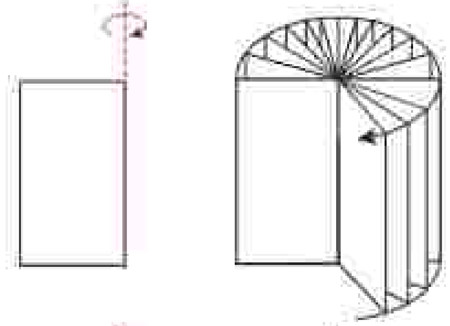
دوران حول محور

سفالگری کلپورگان (سیستان و بلوچستان)

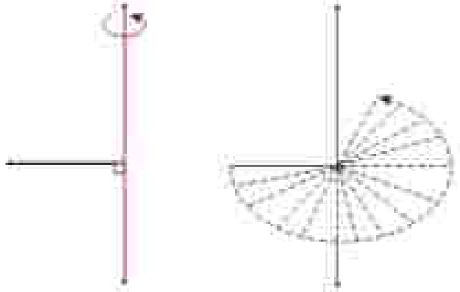
وقتی شکل‌های هندسی متفاوت حول یک محور دوران داده شود، جسم‌های مختلف هندسی ساخته می‌شود. در فعالیت زیر نمونه‌هایی از این مفهوم ارائه شده است. در هر مورد، شکل حاصل از دوران حول محور را مشخص کنید.

فعالیت

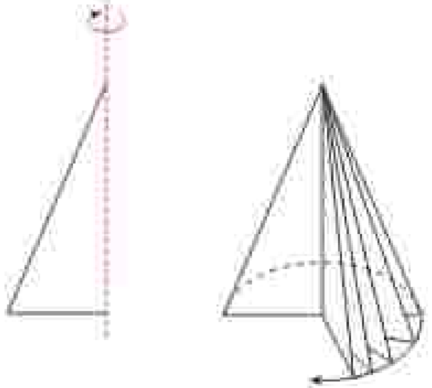
الف) شکل حاصل از دوران یک مستطیل، حول طول یا عرض آن: ....



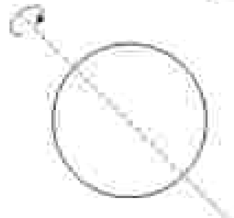
ب) شکل حاصل از دوران یک پاره‌خط، حول پاره‌خط دیگری که بر آن عمود است: ....



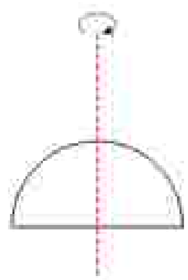
پ) شکل حاصل از دوران یک مثلث قائم‌الزاویه، حول یکی از اضلاع قائمه: ....



ت) شکل حاصل از دوران یک دایره، حول یکی از قطرهای آن: ....



ث) شکل حاصل از دوران یک نیم دایره، حول شعاع عمود بر قطر آن: ....



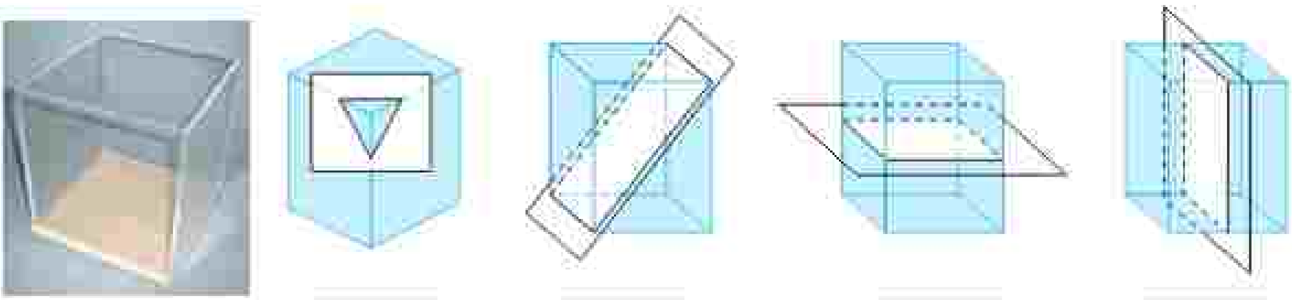
برش

در فعالیت قبل، از دوران شکل حول یک محور، یک جسم دو بعدی یا سه بعدی تشکیل شد. حال فرض کنید می‌خواهیم اجسام سه‌بعدی را برش بزنیم و تغییرات آن را بعد از برش تجسم کنیم. در زندگی روزمره بارها با برش اجسام مختلف هندسی مواجه بوده‌اید. این اجسام می‌توانند توپر یا توخالی باشند.

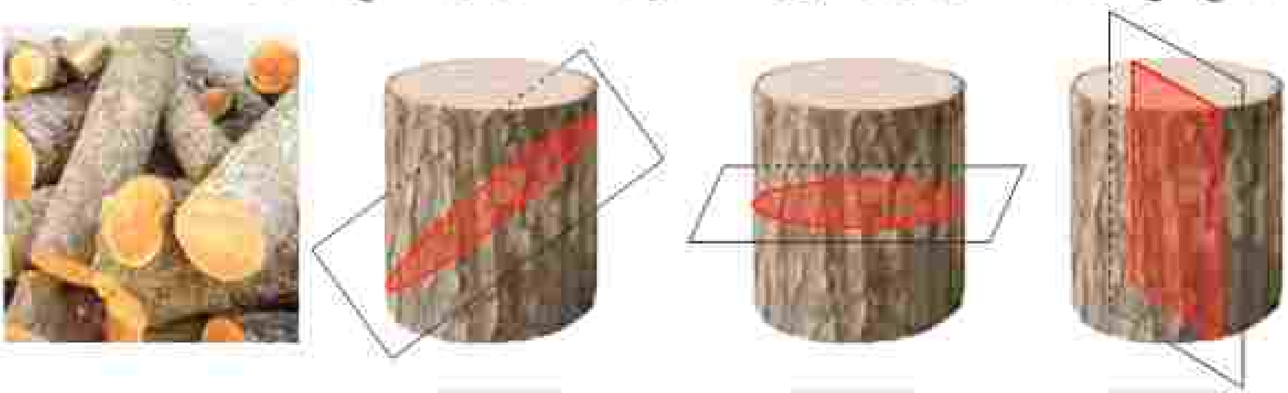
شکلی که از برخورد یک صفحه[1] با یک جسم هندسی حاصل می‌شود، **سطح مقطع** آن نامیده می‌شود.

فعالیت

الف) بعضی از حالت‌های برخورد یک صفحه با یک مکعب مستطیل توخالی با قاعدهٔ مربع شکل، در زیر نمایش داده شده است. در هر یک از حالت‌ها سطح مقطع را مشخص کنید.

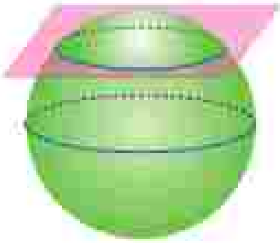


ب) سطح مقطع استوانه با صفحه‌های عمودی، افقی و صفحهٔ مایلی که با قاعده‌های استوانه متقاطع نباشد، به چه شکل است؟



۱ـ خط و صفحه از مفاهیم اساسی هندسه هستند. همان‌طور که خط از هر دو طرف نامحدود است، صفحه نیز از هر طرف ادامه دارد و ضخامت ندارد.

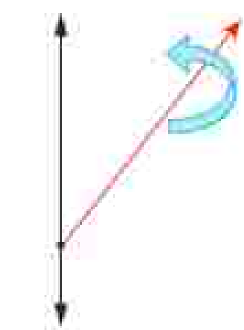
ب) سطح مقطع حاصل از برخورد یک صفحه با یک کره به چه شکل است؟
در چه حالتی این سطح مقطع، بیشترین مساحت ممکن را دارد؟



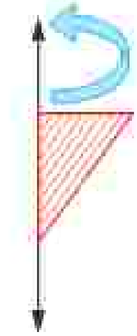
کار در کلاس

۱ شکل حاصل از دوران حول محور را در حالت‌های زیر مشخص کنید و آنها را با هم مقایسه کنید:

الف) شکل حاصل از دوران نیم‌خط حول محور



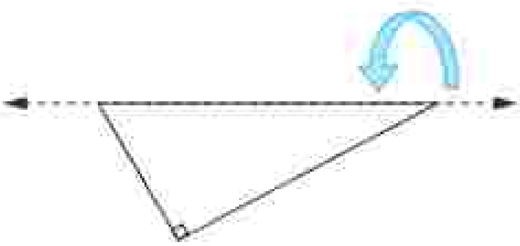
ب) شکل حاصل از دوران مثلث قائم‌الزاویه حول محور



۲ مستطیلی را حول عرض آن دوران داده‌ایم.
الف) شکل حاصل را رسم کنید.
ب) سطح مقطع حاصل از برخورد این استوانه و یک صفحه در چه حالتی یک مربع است؟
پ) اگر ابعاد مستطیل، ۳ و ۴ باشند، مساحت سطح مقطع حاصل از برخورد یک صفحهٔ موازی با قاعدهٔ این استوانه چقدر است؟
ت) در حالت پ، اگر صفحه‌ای عمود بر قاعدهٔ استوانه آن را قطع کند، بیشترین مساحت ممکن برای سطح مقطع حاصل چقدر است؟

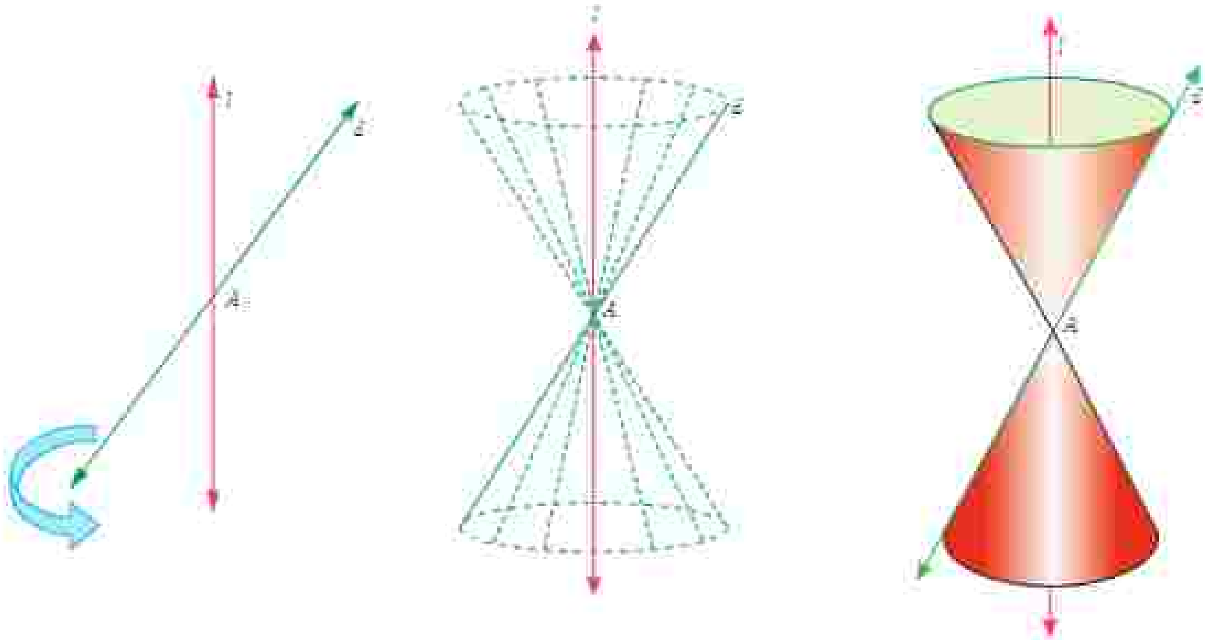
مخازن نفتی در زنجان

۳ شکل حاصل از دوران یک مثلث قائم‌الزاویه حول وتر آن چیست؟

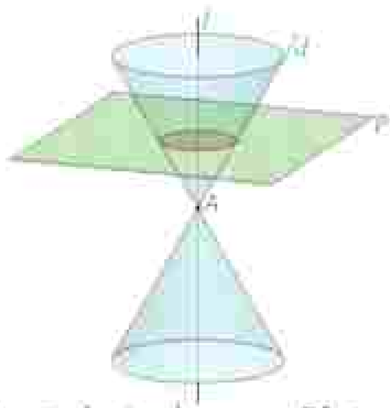


آشنایی با مقاطع مخروطی

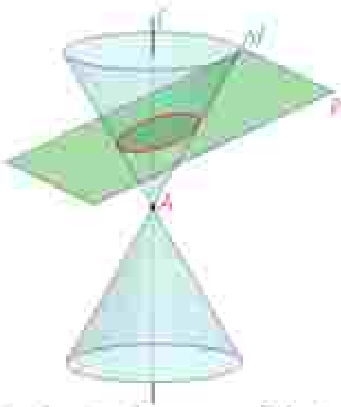
دو خط d و l در نقطه‌ای مثل A متقاطع‌اند. اگر خط d را حول خط l دوران کامل دهیم، شکل حاصل یک **سطح مخروطی** نامیده می‌شود. در این حالت خط l **محور**، نقطهٔ A، **رأس** و خط d، **مولد** این سطح مخروطی است.



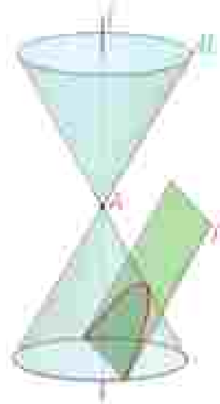
وقتی یک سطح مخروطی توسط یک صفحه برش داده می‌شود، معمولاً سطح مقطع، یک منحنی است. از آنجا که این منحنی‌ها، حاصل تقاطع یک صفحه با یک سطح مخروطی هستند، **مقاطع مخروطی** نامیده می‌شوند. در ادامه با انواع مقاطع مخروطی آشنا خواهیم شد.



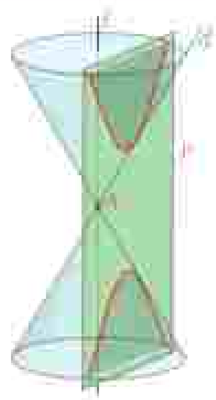
الف) اگر صفحهٔ P بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل **دایره** است.



ب) اگر صفحهٔ P بر محور سطح مخروطی عمود نباشد و در هیچ حالتی با مولد سطح مخروطی موازی نشود و از رأس نگذرد، شکل حاصل **بیضی** خواهد بود.



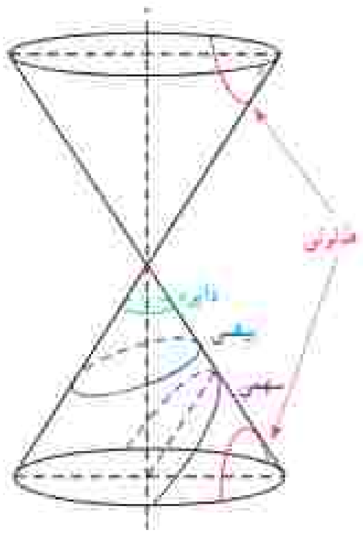
پ) اگر صفحهٔ P در یکی از موقعیت‌ها با مولد سطح مخروطی موازی باشد و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل یک سهمی است.



ت) اگر صفحهٔ P سطح مخروطی را، هم در قسمت بالای و هم در قسمت پایینی قطع کند و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل را هذلولی[1] می‌نامیم.

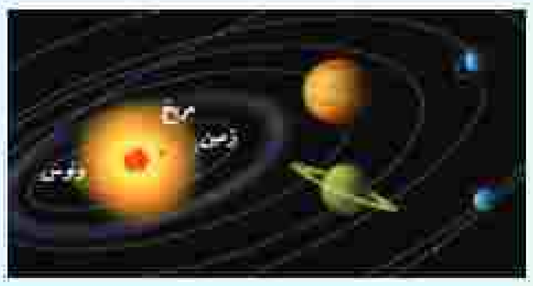
بدین ترتیب مقاطع مخروطی عبارت‌اند از دایره، بیضی، سهمی و هذلولی.

در ادامهٔ این درس قصد داریم بیضی و ویژگی‌های آن را بدون معرفی معادلهٔ آن، مورد بررسی قرار دهیم.



خواندنی

مقاطع مخروطی ابتدا توسط یونانیان باستان مورد مطالعه قرار گرفتند و به مرور زمان در مطالعهٔ مدار سیاره‌ها، ستاره‌های دنباله‌دار و قمرهای مصنوعی کاربردهای زیادی پیدا کردند. این منحنی‌ها همچنین در مطالعهٔ ساختار اتم‌ها، سیستم‌های راهنمای هواپیماها، ساخت عدسی‌ها، تلسکوپ‌ها، نقشه‌برداری، وسایل نوری، وسایل پیش‌بینی هوا، ارتباطات قمرهای مصنوعی، ساختن پل و علاوه بر آن در علوم نظامی، پزشکی و اقتصاد به کار می‌روند.

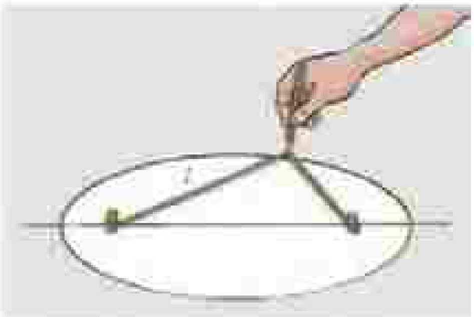


۱ـ معادلهٔ هذلولی و بررسی ویژگی‌های آن جزء اهداف این کتاب نیست.

بیضی

حتماً می‌دانید که به کمک یک تکه نخ چگونه می‌توان یک دایره رسم کرد. در این فعالیت می‌خواهیم ببینیم طریقهٔ رسم بیضی به کمک یک تکه نخ چگونه است و حین انجام این فعالیت، ویژگی‌های بیضی را بهتر بشناسیم.

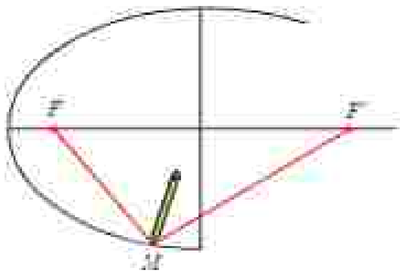
فعالیت



مانند شکل دو سر نخی به طول l را روی یک صفحه ثابت کنید. دقت داشته باشید که برای رسم بیضی لازم است که طول نخ از فاصلهٔ بین دو میخ، بیشتر باشد. حالا مطابق شکل، مدادتان را در حالتی که تکه نخ از دو طرف کاملاً کشیده شده است، روی صفحه حرکت دهید.

شکل حاصل منحنی بسته‌ای است که به آن **بیضی** می‌گوییم.

همان‌طور که دیدید دو میخ در واقع نشان‌دهندهٔ دو نقطهٔ ثابت در بیضی هستند. این دو نقطه را **کانون‌های[1] بیضی** می‌نامند.



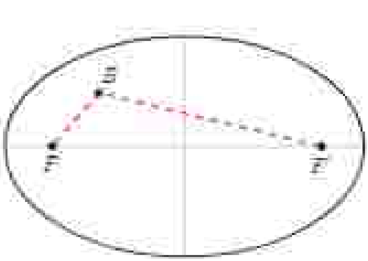
اگر کانون‌های بیضی را با F و F' نمایش دهیم و نقطه‌ای مثل M یک نقطهٔ دلخواه از بیضی باشد، مجموع فواصل این نقطه از نقاط F و F' یعنی $MF + MF'$ برابر با چیست؟

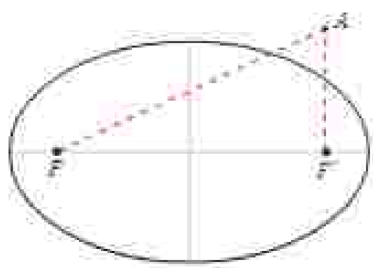
....

بدین ترتیب:

> بیضی، مجموعه نقاطی از صفحه است که مجموع فواصل آنها از دو نقطهٔ ثابت واقع در صفحه، برابر با مقداری ثابت است.[2]

می‌توان نشان داد که اگر نقطهٔ دلخواه A، بیرون بیضی باشد، مجموع فواصل آن از نقاط F و F' بیشتر از l و اگر نقطهٔ دلخواه B، داخل بیضی باشد، مجموع فاصلهٔ آن از دو نقطهٔ F و F' کمتر از l خواهد بود.





۱ــ Foci

۲ــ اثبات اینکه سطح مقطع مخروطی معرفی شده به عنوان بیضی، با این تعریف همخوانی دارد، خارج از اهداف این کتاب است.

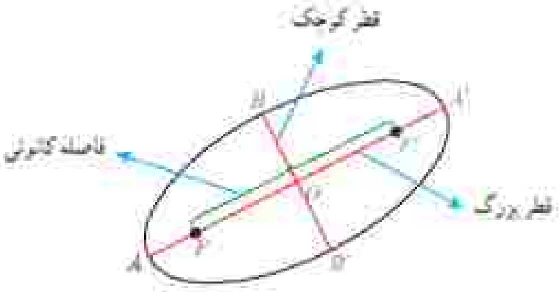
بیضی مقابل را در نظر بگیرید.

در این بیضی کانون‌ها را F و F' نامیده‌ایم.

در هر بیضی اندازهٔ FF'، **فاصلهٔ کانونی** بیضی نامیده می‌شود.

نقطهٔ میانی پاره‌خط FF'، **مرکز بیضی** است که آن را نقطهٔ O نامیده‌ایم.

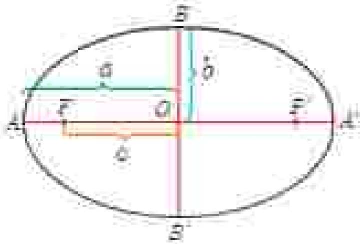
پاره‌خطی که از کانون‌های بیضی می‌گذرد یعنی AA'، **قطر بزرگ** یا **قطر کانونی** بیضی است. پاره‌خطی که در مرکز بیضی بر قطر بزرگ بیضی عمود است، یعنی قطر BB'، **قطر کوچک** بیضی نامیده می‌شود.



اگر قطر بزرگ بیضی افقی باشد، آن بیضی را **بیضی افقی** و اگر قطر بزرگ عمودی باشد، بیضی را **بیضی قائم** می‌نامیم.

فعالیت

بیضی مقابل را در نظر بگیرید. اندازهٔ پاره‌خط‌های OA، OB و OF را به‌ترتیب با a، b و c نمایش داده‌ایم. می‌دانیم که مجموع فواصل هر نقطه از بیضی، از دو کانون بیضی مقداری ثابت است.



۱ می‌خواهیم نشان دهیم قطر بزرگ بیضی طولی برابر با همین مقدار ثابت دارد.

در رسم بیضی، حالتی را در نظر بگیرید که نوک مداد روی نقطهٔ A قرار دارد. در این صورت:

$$\text{مقدار ثابت} = AF + AF' = AF + (AF + FF') = 2AF + FF' \qquad (1)$$

به همین ترتیب فرض کنید نوک مداد روی نقطهٔ A' قرار دارد. در این صورت داریم:

$$\text{مقدار ثابت} = A'F' + A'F = \text{..........................} \qquad (2)$$

از مقایسهٔ رابطهٔ (۱) و (۲) و برابری سمت چپ دو رابطه داریم: $AF = \text{....}$

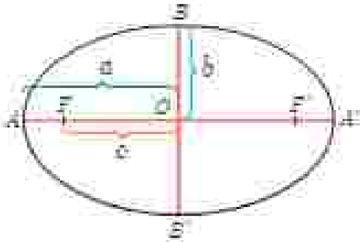
پس:

$$\text{مقدار ثابت} = AF + AF' = \text{......} + AF' = \text{......}$$

بنابراین:

> مجموع فواصل هر نقطه از بیضی، از دو کانون آن، مقدار ثابتی است که برابر است با طول قطر بزرگ بیضی.

سؤال: با توجه به تساوی $AF = A'F'$ نشان دهید که مرکز بیضی قطر بزرگ آن را نصف می‌کند و از آن نتیجه بگیرید طول قطر بزرگ بیضی برابر $2a$ است.



۲ حال قصد داریم رابطهٔ بین a، b و c را پیدا کنیم.

الف) نقطهٔ B را مطابق شکل روی بیضی در نظر بگیرید. می‌دانیم این نقطه روی عمود منصف پاره‌خط FF' است. (چرا؟)

ب) به کمک قسمت قبلی فعالیت، اندازهٔ BF را پیدا کنید.

پ) چه رابطه‌ای بین a، b و c وجود دارد؟

ت) آیا مرکز بیضی قطر کوچک را هم نصف می‌کند؟ چرا؟

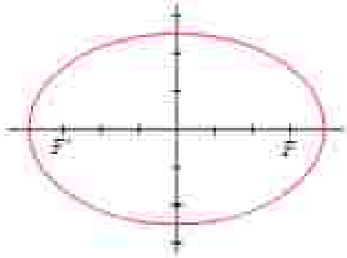
بنابراین:

> اگر در یک بیضی، اندازهٔ نیم قطر بزرگ را a، اندازهٔ نیم قطر کوچک را b و نصف فاصلهٔ کانونی بیضی را c بنامیم، آنگاه ....

مثال:

اگر در یک بیضی $c=۳$ و $a=۴$ باشد، اندازهٔ قطر کوچک بیضی چقدر است؟

حل:



$$b^2=a^2-c^2=۴^2-۳^2=۱۶-۹=۷ \Rightarrow b=\sqrt{۷}$$

و بنابراین اندازهٔ قطر کوچک برابر است با $۲\sqrt{۷}$.

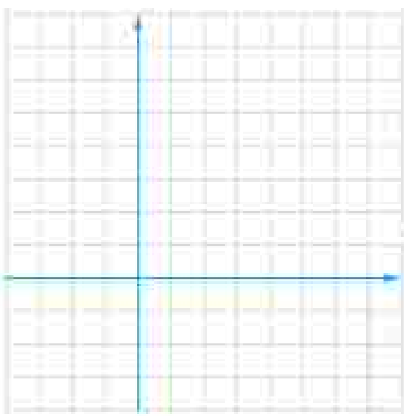
کار در کلاس

۱) اگر در یک بیضی داشته باشیم $a=۵$ و $b=۳$، در این صورت اندازهٔ فاصلهٔ کانونی را محاسبه کنید.

۲) در یک بیضی افقی طول قطر بزرگ ۶ و قطر کوچک ۴ واحد است.

اگر مرکز این بیضی نقطه‌ای با مختصات $(۴،۵)$ باشد:

الف) فاصلهٔ کانونی بیضی را پیدا کنید.



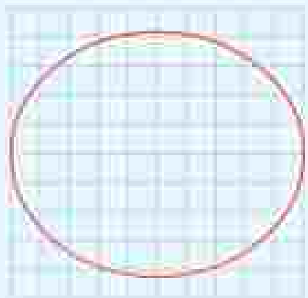
ب) مختصات نقاط دو سر قطر بزرگ و قطر کوچک و همچنین کانون‌های بیضی را بنویسید.

خروج از مرکز

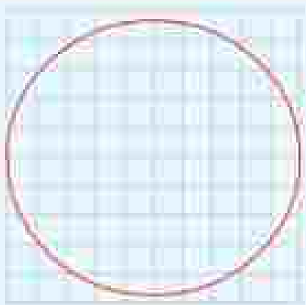
همان‌طور که دیدید اندازهٔ قطر بزرگ، قطر کوچک و فاصلهٔ کانونی یک بیضی مقادیری به هم وابسته‌اند. بدیهی است که همیشه مقدار a از مقدار b و c بیشتر است (چرا؟).
اندازه‌های a، b و c بر شکل بیضی تأثیرگذار است و همواره $\frac{c}{a}$ مقداری بین ۰ و ۱ است. (چرا؟). هر چه نسبت $\frac{c}{a}$، بزرگ‌تر و به ۱ نزدیک‌تر باشد، شکل بیضی کشیده‌تر می‌شود و هر چه مقدار $\frac{c}{a}$ کوچک‌تر و به صفر نزدیک‌تر باشد، شکل بیضی به شکل دایره نزدیک‌تر خواهد شد.

مقدار $\frac{c}{a}$ را **خروج از مرکز بیضی** می‌نامند و معمولاً آن را با حرف e نمایش می‌دهند.

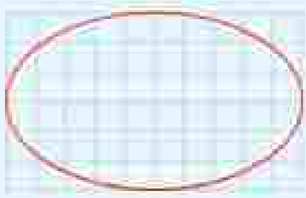
در ادامه چند بیضی با مقادیر مختلف e رسم شده است. تأثیر اندازهٔ خروج از مرکز را بر شکل بیضی بررسی کنید.



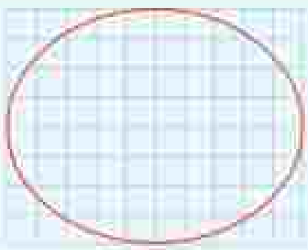
$\frac{c}{a} = ۰/۴$



$\frac{c}{a} = ۰/۲$

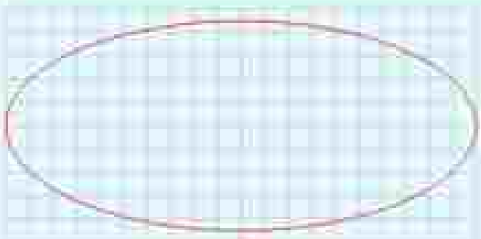


$\frac{c}{a} = \frac{۳}{۵}$



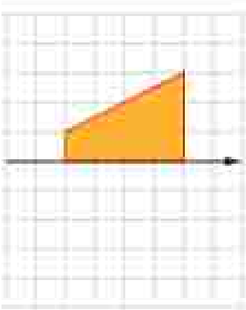
$\frac{c}{a} = ۰/۶$

$\frac{c}{a} = ۰/۹۸$



$\frac{c}{a} = ۰/۹$

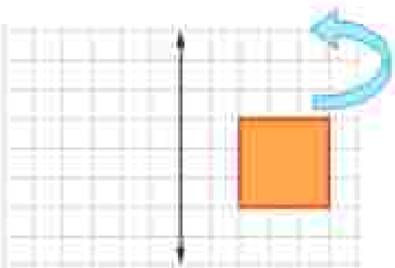
تمرین



۱ در شکل روبه‌رو می‌خواهیم ذوزنقه قائمه را حول محور دوران دهیم.

الف) حجم شکل حاصل را محاسبه کنید.

ب) سطح مقطع این شکل در برخورد با صفحه‌ای که شامل محور دوران باشد، چیست و مساحت آن چقدر است؟



۲ مربعی با ضلع ۳ واحد مطابق شکل روبه‌رو در فاصلهٔ ۲ واحد از یک خط راست قرار دارد.

الف) شکل حاصل از دوران این مربع حول محور داده شده را رسم و حجم آن را محاسبه کنید.

ب) سطح مقطع این شکل را در برخورد با صفحه‌ای موازی با قاعدهٔ آن توصیف کنید.

۳ اگر یک لوزی با طول قطرهای ۶ و ۴ حول قطر بزرگ دوران داده شود، حجم شکل حاصل چقدر است؟

۴ کانون‌های یک بیضی نقاط $(1,3)$ و $(1,-5)$ است.

الف) فاصلهٔ کانونی، مختصات مرکز بیضی و معادلهٔ قطرهای بزرگ و کوچک بیضی را بنویسید.

ب) اگر $a=6$ باشد، اندازهٔ قطر کوچک و خروج از مرکز بیضی را پیدا کنید.

۵ خروج از مرکز یک بیضی افقی $\frac{4}{5}$، مرکز آن $(-2,-1)$ و طول قطر کوچک این بیضی ۶ واحد است.

الف) طول قطر کانونی و فاصلهٔ کانونی را محاسبه کنید.

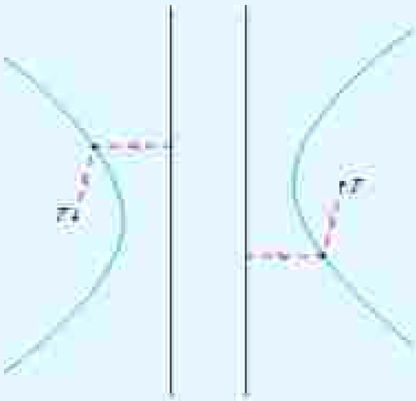
ب) مختصات نقاط دو سر قطر کوچک و قطر بزرگ و کانون‌های بیضی را پیدا کنید.

خواندنی

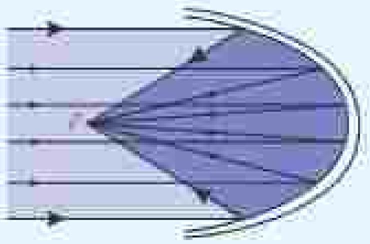
در سال‌های گذشته با معادلهٔ $y=ax^2+bx+c$ که $a\neq 0$ آشنا شدید و نمودار آن را سهمی نامیدید. سهمی به بیان دقیق‌تر، مجموعه نقاطی از صفحه است که از یک خط ثابت داده شده در آن صفحه و یک نقطهٔ ثابت غیر واقع بر آن خط و در همان صفحه، به یک فاصله است. این نقطهٔ ثابت را **کانون سهمی** و خط ثابت را **خط هادی سهمی** می‌نامند.

شکل مقابل یک سهمی را نمایش می‌دهد. همان‌طور که می‌بینید تمام نقاط روی سهمی از نقطهٔ ثابت F و خط هادی فاصله‌ای برابر دارند. اگر از نقطهٔ F به خط هادی عمود کنیم، محل تقاطع خط عمود و سهمی، نقطه‌ای است که به آن رأس سهمی می‌گویند و در این شکل آن را S نامیده‌ایم.

نمودارهای زیر، حالت‌های مختلف سهمی را نمایش می‌دهد.

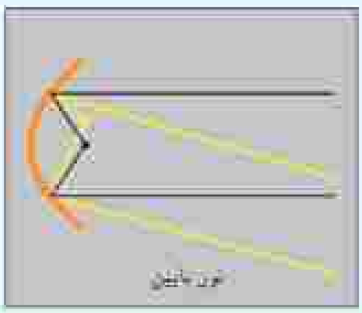


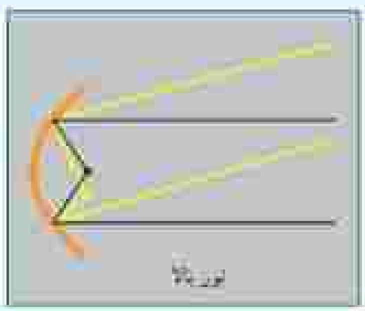
سهمی‌ها ویژگی جالبی دارند که در ساخت آینه‌های سهموی، تلسکوپ‌ها، چراغ‌های جلوی اتومبیل، آنتن‌های سهموی رادار و گیرنده‌های بشقابی تلویزیون کاربرد دارد. پرتوهایی که از کانون سهمی به سهمی برخورد می‌کنند، موازی با محور سهمی (عمود بر خط هادی) خارج می‌شوند و بالعکس، پرتوهایی که موازی با محور سهمی به آن می‌تابند، دقیقاً از کانون سهمی می‌گذرند.



به عنوان مثال معمولاً جدارهٔ پشت لامپ خودروها، آینه‌ای به شکل سهمی است. چراغ خودرو دقیقاً در کانون این سهمی قرار داده می‌شود و بدین ترتیب شعاع‌های نور بعد از برخورد با جدارهٔ آینه‌ای به‌صورت پرتوهای موازی با محور سهمی به جلو بازتاب می‌یابد و روشنایی بیشتری را موجب می‌شوند.

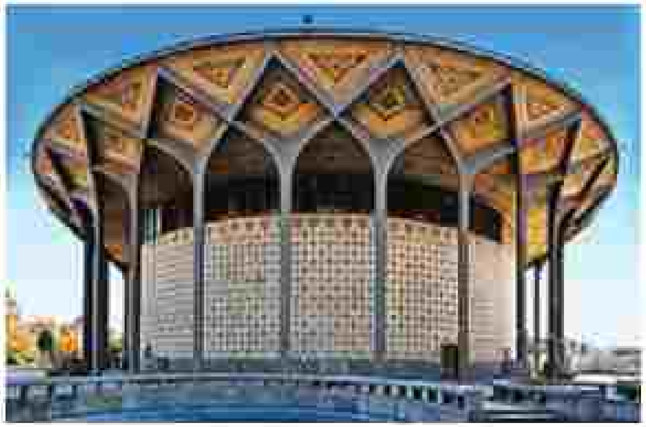
جابه‌جایی اندک لامپ در راستای عمودی، باعث خروج پرتوهای نور رو به بالا یا رو به پایین می‌شود که اصطلاحاً به آن نور بالا یا نور پایین گفته می‌شود.





درس دوم

دایره

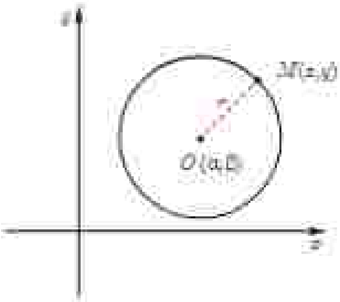


زیربنای دایره‌ای شکل مجموعه تئاتر شهر، تهران

زیربنای برج میلاد با نقشهٔ دایره‌ای شکل به قطر ۴۴ متر

دایره یکی از شکل‌های مهم هندسی است که با تعریف و برخی ویژگی‌های آن در سال‌های قبل آشنا شده‌اید. می‌دانیم دایره، مجموعهٔ نقاطی از صفحه است که فاصلهٔ آنها از نقطهٔ ثابتی در همان صفحه، مقداری ثابت و مثبت باشد. این نقطهٔ ثابت را **مرکز دایره** و مقدار ثابت را **اندازهٔ شعاع دایره** می‌نامیم. دایرهٔ C را به مرکز O و شعاع r معمولاً با نماد $C(O,r)$ نمایش می‌دهیم.

در این درس به تحلیل برخی از ویژگی‌های دایره در دستگاه مختصات خواهیم پرداخت.



دایرهٔ $C(O,r)$ را به گونه‌ای در نظر بگیرید که مرکز آن نقطهٔ $O(\alpha,\beta)$ و نقطهٔ $M(x,y)$ نقطهٔ دلخواهی روی آن باشد. می‌دانیم که فاصلهٔ مرکز دایره از تمام نقاط روی آن برابر با مقدار ثابت r است.

بنابراین به کمک رابطهٔ فاصلهٔ دو نقطه که در سال‌های گذشته با آن آشنا شدیم، داریم:

$$OM=\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}$$

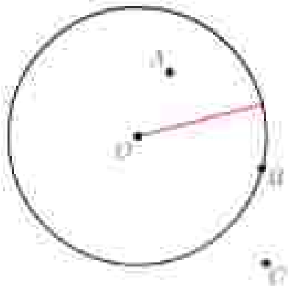
از طرفی $OM=r$

$$\Rightarrow (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$$

رابطهٔ $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$ معادلهٔ دایره‌ای به مرکز $O(\alpha,\beta)$ و شعاع r در صفحهٔ مختصات است که به آن **معادلهٔ استاندارد دایره** می‌گوییم.

فعالیت

می‌توان دید که:



الف) اگر نقطه‌ای مثل B روی دایره باشد، فاصلهٔ آن تا مرکز دایره برابر شعاع دایره است، یعنی $OB=r$

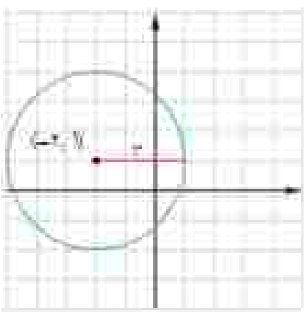
ب) اگر نقطه‌ای مثل A درون دایره باشد، فاصلهٔ آن تا مرکز دایره .... شعاع دایره است، یعنی $OA \square r$

پ) اگر نقطه‌ای مثل C بیرون دایره باشد، فاصلهٔ آن تا مرکز دایره .... شعاع دایره است، یعنی $OC \square r$

بدین ترتیب اگر معادلهٔ دایرهٔ $C(O,r)$ به مرکز $O(\alpha,\beta)$ و شعاع r در دستگاه مختصات داده شده باشد، می‌توان وضعیت نقاط مختلف صفحه را نسبت به دایره بررسی کرد:

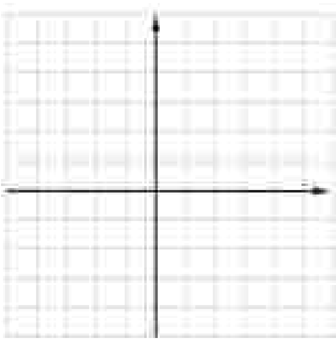
> نقاطی که در معادلهٔ $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$ صدق کنند، نقاطی از صفحه هستند که روی دایره قرار دارند.
>
> مجموعه جواب نامعادلهٔ $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2<r^2$ نقاطی از صفحه را مشخص می‌کند که ....
>
> مجموعه جواب نامعادلهٔ $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2>r^2$ نقاطی از صفحه را مشخص می‌کند که ....

مثال:



الف) اگر مرکز دایره‌ای نقطهٔ $(-2,1)$ و شعاع آن ۳ باشد، معادلهٔ استاندارد دایره به شکل زیر خواهد بود:

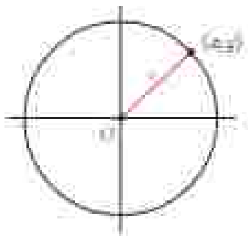
$$(x+2)^2+(y-1)^2=9$$



ب) اگر معادلهٔ دایره‌ای به شکل $(x-3)^2+(y+1)^2=4$ باشد، مختصات مرکز آن $(3,-1)$ و اندازهٔ شعاع برابر با ۲ است.

رسم شکل برعهدهٔ دانش‌آموزان است.

کار در کلاس



۱ در حالت‌های زیر، معادلهٔ دایره را بنویسید:

الف) دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۲.

ب) دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۳.

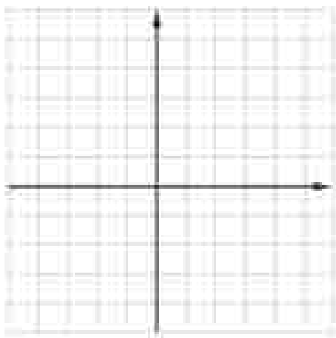
پ) دایره‌ای که از نقطهٔ $(3,-1)$ بگذرد و مرکز آن $(1,-2)$ باشد.

۲ با تکمیل جدول، وضعیت هر نقطه را نسبت به دایره مشخص کنید:

معادلهٔ دایره	شعاع و مختصات مرکز دایره	نقاط: $A(1,1)$	نقاط: $B(0,3)$	نقاط: $C(-2,4)$
$(x+2)^2+(y-3)^2=4$				
	دایره به مرکز $(2,-1)$ و شعاع ۳		بیرون دایره	

۳ اگر معادلهٔ دایره‌ای به شکل $(x+1)^2+y^2=4$ باشد:

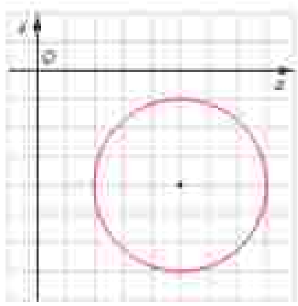
الف) مختصات مرکز دایره و اندازهٔ شعاع دایره را بنویسید.

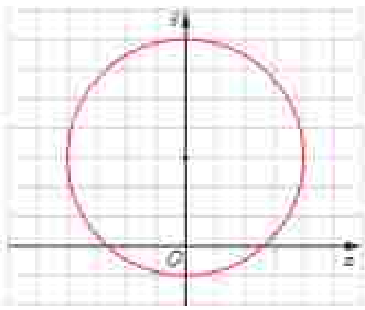


ب) مختصات نقاط تقاطع این دایره را با محورهای مختصات پیدا کنید.

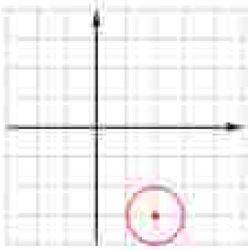
پ) شکل این دایره را رسم کنید و صحت پاسخ‌های خود را به کمک شکل بررسی کنید.

۴ معادلهٔ دایره‌های زیر را بنویسید:





معادلهٔ گستردهٔ یک دایره



معادلهٔ دایرهٔ $(x-2)^2+(y+3)^2=1$ را در نظر بگیرید.

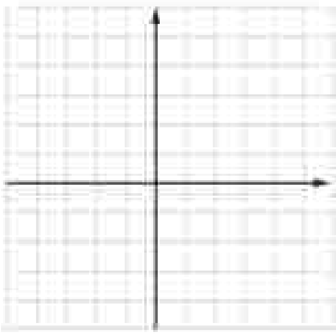
این معادله را به کمک اتحادها می‌توان به شکل زیر ساده کرد:

$x^2-4x+4+y^2+6y+9=1$

$\rightarrow x^2+y^2-4x+6y+12=0$

این رابطه را **معادلهٔ گستردهٔ دایره** یا معادلهٔ ضمنی دایره می‌نامیم.

بدیهی است که معادلهٔ استاندارد دایره و معادلهٔ گستردهٔ آن به یکدیگر قابل تبدیل‌اند.



مثال: فرض کنید معادلهٔ گستردهٔ یک دایره به شکل $x^2+y^2-6x+2y+6=0$ باشد. با استفاده از مربع کامل کردن، سعی می‌کنیم معادلهٔ گسترده را به معادلهٔ استاندارد تبدیل کنیم. داریم:

$x^2+y^2-6x+2y+6=0$

$\rightarrow (x^2-6x)+(y^2+2y)+6=0$

$\rightarrow (x-3)^2-9+(y+1)^2-1+6=0$

$\rightarrow (x-3)^2+(y+1)^2=4$

مختصات مرکز و شعاع این دایره را بنویسید و نمودار آن را رسم کنید.

معادلهٔ گستردهٔ یک دایره را به شکل $x^2+y^2+ax+by+c=0$ در نظر می‌گیریم. با تبدیل x^2+ax و y^2+by به دو مربع کامل داریم:

$(x^2+ax)+(y^2+by)+c=0$

$\rightarrow (x+\frac{a}{2})^2-\frac{a^2}{4}+(y+\frac{b}{2})^2-\frac{b^2}{4}+c=0$

$\rightarrow (x+\frac{a}{2})^2+(y+\frac{b}{2})^2=\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c=\frac{a^2+b^2-4c}{4}$

بدین ترتیب:

اگر $x^2+y^2+ax+by+c=0$ **معادلهٔ گستردهٔ** یک دایره باشد، مختصات مرکز این دایره $O(\frac{-a}{2},\frac{-b}{2})$ است. شعاع این دایره برابر است با: $r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}$

بدیهی است که با توجه به مثبت بودن r، معادلهٔ $x^2+y^2+ax+by+c=0$ معادلهٔ یک دایره است اگر و تنها اگر رابطهٔ $a^2+b^2>4c$ برقرار باشد. (چرا؟)

کار در کلاس

معادلهٔ گستردهٔ دایره‌ای به شکل $x^2+y^2-2x-6y+6=0$ است. مختصات مرکز این دایره و شعاع آن را پیدا کنید و معادلهٔ دایره را به شکل استاندارد بنویسید.

اوضاع نسبی خط و دایره

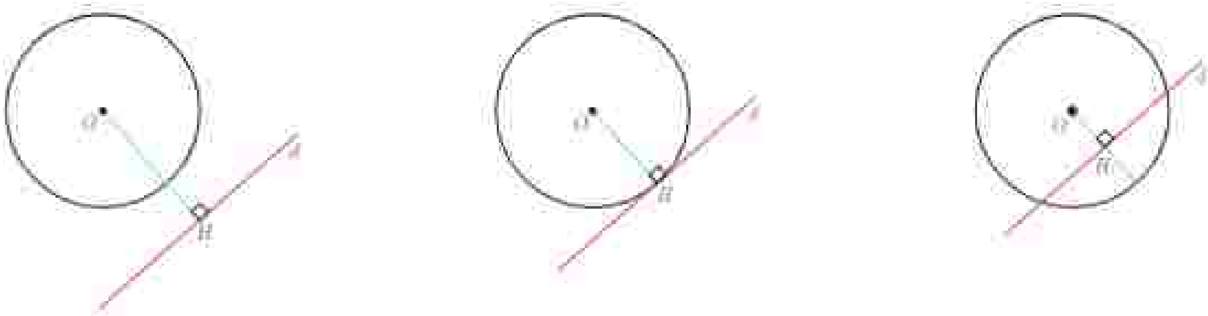
در سال‌های گذشته به طور شهودی با اوضاع نسبی خط و دایره آشنا شده‌اید. در این فعالیت قصد داریم به کمک معادلهٔ دایره و خط، این مفاهیم را مرور کنیم.

دایره $C(O, r)$ را در صفحه در نظر بگیرید. با توجه به شکل، به سادگی می‌توان دید که خط و دایره می‌توانند یک، یا دو نقطهٔ اشتراک داشته، یا هیچ نقطهٔ اشتراکی نداشته باشند.

اگر خط d با دایره متقاطع باشد، $OH < r$ است.

اگر خط d بر دایره مماس باشد، $OH = r$ است.

اگر خط d، دایره را قطع نکند، $OH > r$ است.



یادآوری

۱ـ خط مماس در نقطهٔ تماس با دایره، بر شعاع آن دایره عمود است.

۲ـ فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_0, y_0)$ از خط به معادلهٔ $ax + by + c = 0$ برابر است با:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

در حالتی که معادلهٔ دایرهٔ $C(O, r)$ به مرکز $O(\alpha, \beta)$ و شعاع r در دستگاه مختصات داده شده باشد، می‌توان وضعیت خطوط مختلف صفحه را نسبت به دایره بررسی کرد.

مثال:

وضعیت خط $x + y = 3$ را نسبت به دایرهٔ $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ مشخص کنید.

حل:

کافی است فاصلهٔ مرکز دایره را از خط داده شده حساب کرده و اندازهٔ آن را با اندازهٔ شعاع دایره مقایسه کنیم.

مرکز دایره از رابطهٔ $O(\frac{-a}{2}, \frac{-b}{2})$، نقطهٔ $(1, 0)$ و شعاع دایره از رابطهٔ $r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$ برابر است با ۲.

از طرفی فاصلهٔ مرکز دایره از خط داده شده برابر است با $d = \frac{|1(1) + 1(0) - 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ و از آنجا که این مقدار از شعاع دایره کمتر است، پس می‌توان چنین نتیجه گرفت که خط داده شده با دایره متقاطع است.

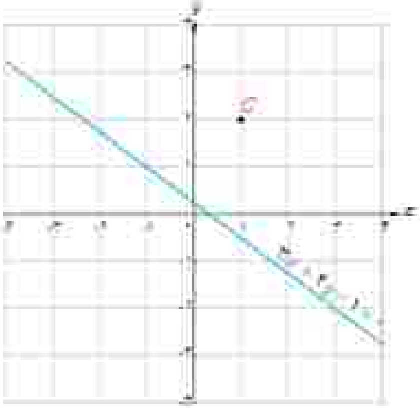
کار در کلاس

۱ در موارد زیر وضعیت خط و دایره را نسبت به هم مشخص کنید.

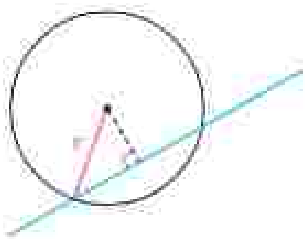
الف) دایرهٔ $x^2+y^2+2x+2y-1=0$ و خط $x+y=1$

ب) دایرهٔ $(x-2)^2+(y+3)^2=4$ و خط $y=-1$

۲ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که بر خط $3x+4y-1=0$ مماس بوده و مرکز آن $O(1,2)$ باشد.



۳ مرکز دایره‌ای، نقطهٔ $O(2,-3)$ است. این دایره روی خط $3x-4y+2=0$ وتری به طول ۶ جدا می‌کند. معادلهٔ این دایره را بنویسید.

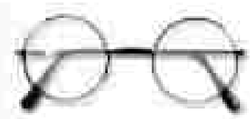


اوضاع نسبی دو دایره

نظیر آنچه برای اوضاع نسبی نقطه و دایره و همین‌طور خط و دایره دیدید، قصد داریم ابتدا به طور شهودی وضعیت‌های مختلفی را که دو دایرهٔ دلخواه می‌توانند نسبت به هم داشته باشند، مشخص کنیم و سپس وضعیت دو دایره را نسبت به یکدیگر، در صفحه مختصات و با داشتن معادلهٔ دو دایره بررسی کنیم.

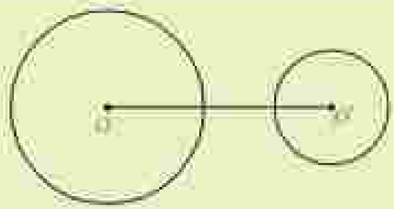
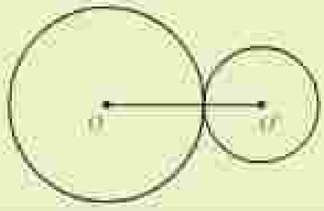
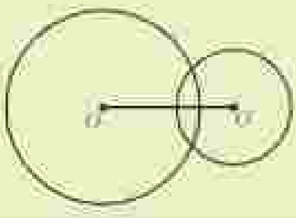
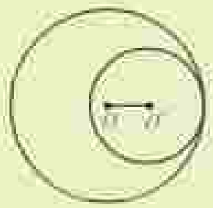
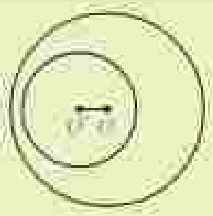
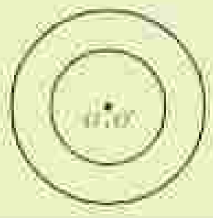






دو دایرهٔ دلخواه $C(O,r)$ و $C'(O',r')$ را با فرض $r > r'$ در نظر بگیرید. در جدول زیر حالت‌های مختلف دو دایره نسبت به هم داده شده و در هر مورد، رابطهٔ بین اندازهٔ شعاع‌های دو دایره با اندازهٔ فاصلهٔ بین مرکزهای دو دایره بیان شده است.

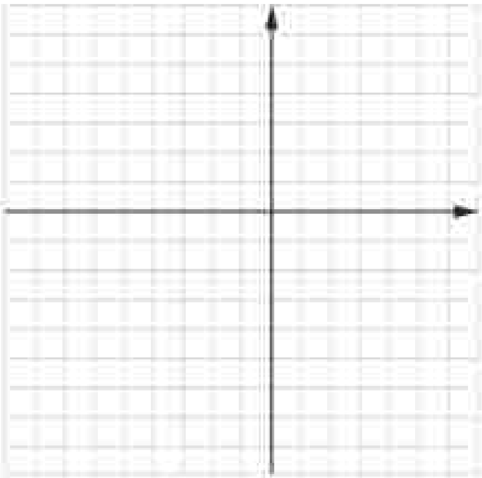
پاره‌خطی که مرکزهای دو دایره را به‌هم وصل می‌کند، **خط‌المرکزین** نامیده می‌شود. در اینجا اندازهٔ خط‌المرکزین را با d نمایش داده‌ایم.

دو دایره بیرون هم (متخارج)	$d > r + r'$	
دو دایرهٔ مماس بیرون	$d = r + r'$	
دو دایرهٔ متقاطع	$r - r' < d < r + r'$	
دو دایرهٔ مماس درون	$d = r - r'$	
دو دایرهٔ متداخل	$d < r - r'$	
دو دایرهٔ هم‌مرکز	$d = 0$	

در حالتی که معادلهٔ دو دایره را داشته باشیم، بدون رسم دو دایره می‌توانیم وضعیت آنها را نسبت به هم مشخص کنیم.

مثال: وضعیت دو دایرهٔ $x^2+y^2+6x+8y=0$ و $x^2+y^2-4x+6y+12=0$ را نسبت به هم مشخص کنید و سپس نمودار دو دایره را رسم کنید.

حل: به کمک آنچه دیدیم، ابتدا مختصات مرکز و طول شعاع هر دایره را پیدا می‌کنیم و سپس با مقایسه مقادیر مجموع و تفاضل دو شعاع با طول خط‌المرکزین، وضعیت دو دایره را نسبت به هم مشخص می‌کنیم.



در دایرهٔ $x^2+y^2+6x+8y=0$ با پیدا کردن مرکز دایره و اندازهٔ شعاع داریم: مرکز دایره نقطهٔ $O(-3,-4)$ و اندازهٔ شعاع برابر ۵ است.

به روش مشابه در دایرهٔ $x^2+y^2-4x+6y+12=0$، مرکز دایره نقطهٔ $O'(2,-3)$ و اندازهٔ شعاع $r'=1$ است.

از طرفی طول خط‌المرکزین برابر است با: $OO'=\sqrt{(-3-2)^2+(-4+3)^2}=\sqrt{26}$

بنابراین از آنجا که داریم: $5-1<\sqrt{26}<5+1$ یعنی $r-r'<d<r+r'$ پس دایره‌های فوق، متقاطع هستند.

رسم دو دایره و بررسی صحت پاسخ به کمک شکل، به دانش‌آموزان واگذار شده است.

کار در کلاس

۱. با انجام مراحل زیر، معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که بر دایرهٔ $x^2+y^2+2x-4y-4=0$ مماس بیرون و مرکز آن نقطهٔ $O(2,-2)$ باشد:

ـ مختصات نقطهٔ O'، مرکز دایرهٔ داده شده عبارت است از: ....

ـ اندازهٔ r' یعنی شعاع دایره داده شده برابر است با: ....

ـ طول OO' برابر است با: ....

ـ شرط اینکه دو دایره مماس بیرونی باشند این است که: .... پس شعاع r باید برابر .... باشد.

ـ معادلهٔ دایرهٔ مطلوب را با معلوم بودن اندازهٔ شعاع و مختصات مرکز آن بنویسید: ....

۲. برای حالت‌های زیر معادلهٔ دو دایره را بنویسید و پاسخ خود را با دوستانتان مقایسه کنید.

الف) دو دایره هم‌مرکز باشند.

ب) دو دایره بیرون هم باشند.

۳. برای موارد زیر وضعیت دو دایره را نسبت به هم مشخص کنید:

الف) $x^2+y^2-2x+4y=0$ و $x^2+y^2+2x-4y=0$

ب) $(x+1)^2+(y-2)^2=1$ و $x^2+y^2-2x+4y+1=0$

تمرین

۱) در هر دایره مختصات مرکز دایره و اندازهٔ شعاع آن را پیدا کنید. محل تقاطع هر دایره را با محورهای مختصات، در صورت وجود مشخص کنید و درستی پاسخ خود را به کمک رسم دایره بررسی کنید.

الف) $x^2+y^2-6x+2y+1=0$

ب) $x^2+(y+3)^2-4=0$

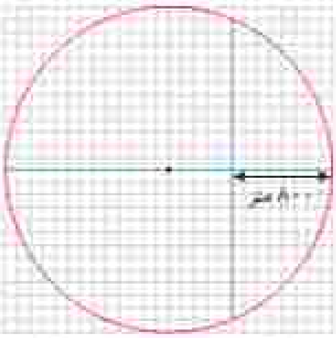
۲) در حالت‌های زیر معادلهٔ دایره را بنویسید:

الف) دایره‌ای که از مبدأ مختصات بگذرد و مرکز آن $C(2,-1)$ باشد.

ب) دایره‌ای که مرکز آن $(2,3)$ و نقطهٔ $(-3,-9)$ نقطه‌ای روی آن باشد.

پ) دایره‌ای که نقاط $(3,0)$ و $(-4,-1)$ دو سر یکی از قطرهای آن باشند.

۳) وضعیت نقاط $(0,1)$، $(-1,0)$، $(-2,-1)$ و $(0,0)$ را نسبت به دایرهٔ $x^2+y^2-2x+4y+1=0$ مشخص کنید.



۴) شهرداری قصد دارد در یک فضای سبز دایره‌ای شکل به شعاع ۱۲۰۰ متر، دو مسیر پیاده‌روی مطابق شکل بسازد. اگر مختصات مرکز دایره $(13,13)$ و هر واحد برابر ۱۰۰ متر باشد:

الف) معادلهٔ این دایره چیست؟

ب) مختصات نقاط برخورد دو مسیر را با دایره پیدا کنید.

پ) دو مسیر در چه نقطه‌ای با یکدیگر متقاطع‌اند؟

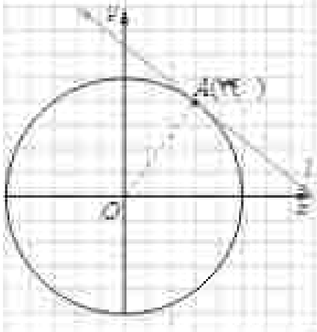
ت) طول مسیر عمودی چقدر است؟

۵) معادلهٔ گستردهٔ یک دایره به شکل $x^2+y^2+2x+2y-8=0$ است. مختصات مرکز دایره و اندازهٔ شعاع آن را پیدا کنید و معادلهٔ آن را به شکل استاندارد بنویسید.

۶) وضع خط‌های زیر را نسبت به دایره مشخص کنید.

الف) $x^2+y^2-4x-4y+7=0$ و $6x+4y=0$

ب) $x^2+y^2=2$ و $y=-x-2$



۷) اگر بدانیم خط L در نقطهٔ $(3,4)$ بر دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات مماس است، معادلهٔ خط مماس چیست؟

۸) معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن، نقطهٔ $(3,0)$ و بر خط $3x-4y=3$ مماس باشد.

۹) مشخص کنید در حالت‌های زیر دو دایره نسبت به هم چه وضعی دارند؟

الف) $x^2+y^2-2x+4y=4$ و $x^2+y^2+2x-4y=9$

ب) $(x-2)^2+(y+3)^2=7$ و $x^2+(y-5)^2=5$

۱۰) معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $(-1,-1)$ و با دایرهٔ $x^2+y^2-4x-6y=3$ مماس درون باشد.

فصل

۷ احتمال

رحیم‌آباد، استان گیلان

احتمال در زندگی روزمره و در علوم گوناگون دارای کاربردهای متنوعی است. احتمال در پیش‌بینی آب و هوا نقش دارد و به ما در تصمیم‌گیری‌ها کمک می‌کند.

قانون احتمال کل

قانون احتمال کل

یادآوری

در پایه‌های قبل با مفهوم احتمال و برخی تعاریف مرتبط با آن آشنا شده‌اید. در زیر خلاصه‌ای از این مطالب آورده شده است.

۱ــ **پدیدهٔ تصادفی** : پدیده یا آزمایشی است که نتیجهٔ آن را نتوان قبل از انجام، به‌طور قطعی پیش‌بینی کرد.

۲ــ **فضای نمونه** : مجموعهٔ تمام نتایج ممکن یک پدیدهٔ تصادفی را فضای نمونهٔ آن پدیده می‌نامیم و معمولاً آن را با S نمایش می‌دهیم.

۳ــ **پیشامد تصادفی** : هر زیرمجموعه از S را یک پیشامد تصادفی در فضای نمونه‌ای S می‌نامیم.

۴ــ **پیشامدها و اعمال روی آنها** : فرض کنید A و B پیشامدهایی از فضای نمونه‌ای S باشند.

الف) **اجتماع دو پیشامد** : پیشامد $A \cup B$ وقتی رخ می‌دهد که حداقل یکی از پیشامدهای A یا B رخ دهد.

ب) **اشتراک دو پیشامد** : پیشامد $A \cap B$ وقتی رخ می‌دهد که هر دو پیشامد A و B رخ دهند.

پ) **تفاضل دو پیشامد** : پیشامد $A - B$ وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ دهد، ولی پیشامد B رخ ندهد.

ت) **متمم یک پیشامد** : پیشامد A' (یا A^c) وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ ندهد. $P(A') = 1 - P(A)$

۵ــ **رابطهٔ محاسبهٔ احتمال وقوع یک پیشامد** :

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد همهٔ حالت‌های ممکن}}$$

۶ــ **رابطهٔ محاسبهٔ احتمال اجتماع دو پیشامد A و B** :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

۷ــ **پیشامدهای ناسازگار** : دو پیشامد A و B را ناسازگار می‌گوییم، هرگاه A و B با هم رخ ندهند؛ به بیان دیگر $A \cap B = \varnothing$. در این صورت داریم :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

۸ــ **تعمیم پیشامدهای ناسازگار** : پیشامدهای A_1 و A_2 و ... و A_n را دو به دو ناسازگار گوییم، هرگاه هیچ دوتایی از آنها نتوانند با هم رخ دهند. در این صورت داریم :

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$$

۹ــ **احتمال شرطی** : منظور از «احتمال A به شرط B» که آن را با $P(A|B)$ نمایش می‌دهیم، احتمال وقوع پیشامد A است، به شرط آنکه بدانیم پیشامد B رخ داده است و داریم :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad (P(B) \neq 0)$$

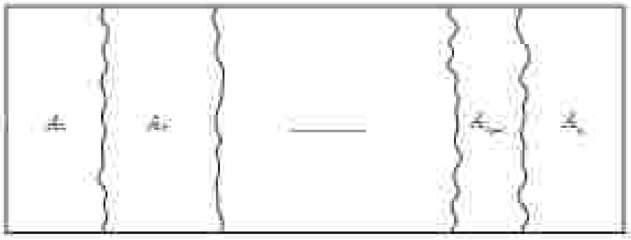
۱۰ــ **پیشامدهای مستقل** : دو پیشامد A و B از هم مستقل‌اند هرگاه وقوع هر یک بر احتمال وقوع دیگری تأثیر نداشته باشد. مستقل بودن دو پیشامد A و B معادل است با اینکه $P(A \cap B) = P(A).P(B)$.

قانون احتمال کل

ــ افراز[1]: فرض کنیم A_1 و A_2 و ... و A_n زیر مجموعه‌هایی ناتهی از مجموعهٔ S باشند، به گونه‌ای که اجتماع همهٔ آنها برابر S، و اشتراک هر دوتای آنها برابر $\varnothing$ باشد. در این صورت می‌گوییم این مجموعه‌ها یک **افراز** روی S درست کرده‌اند. به عبارتی داریم:

۱) $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = S \qquad (\bigcup_{i=1}^{n} A_i = S)$

۲) $A_1 \cap A_2 = \varnothing \ , \ A_1 \cap A_3 = \varnothing \ , \ \cdots \ , \ A_{n-1} \cap A_n = \varnothing \qquad (A_i \cap A_j = \varnothing \ , \ 1 \le i, j \le n, \ i \ne j)$

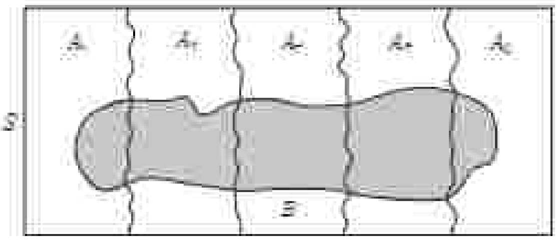


مثال: کشور ایران به ۳۱ استان افراز شده است.

مثال: اگر A مجموعهٔ اعداد طبیعی اول و B مجموعهٔ اعداد طبیعی مرکب و $C=\{1\}$ باشند، در این صورت A، B و C یک افراز روی مجموعهٔ اعداد طبیعی هستند.

مثال: مجموعهٔ اعداد گویا و مجموعهٔ اعداد اصم یک افراز روی مجموعهٔ اعداد حقیقی تشکیل می‌دهند.

سؤال: اگر S فضای نمونه‌ای یک پدیده تصادفی باشد و A_1، A_2، ... و A_n مانند آنچه گفته شد یک افراز روی S درست کنند. آیا پیشامدهای A_1، A_2، ... و A_n دو به دو ناسازگارند؟ چرا؟ آیا امکان دارد هیچ کدام از پیشامدهای A_1، A_2، ... و A_n اتفاق نیفتند؟



فرض کنید پیشامدهای A_1، A_2، A_3، A_4 و A_5 مانند شکل مقابل یک افراز روی فضای نمونه‌ای S درست کرده باشند و B یک پیشامد دلخواه باشد. در این صورت داریم:

$$B=(B\cap A_1)\cup(B\cap A_2)\cup(B\cap A_3)\cup(B\cap A_4)\cup(B\cap A_5)$$

که در آن $B\cap A_i$ و $B\cap A_j$ برای هر $i\ne j$ ناسازگارند. چرا؟

بنابراین داریم[2]:

$$P(B)=P(B\cap A_1)+P(B\cap A_2)+P(B\cap A_3)+P(B\cap A_4)+P(B\cap A_5)=\sum_{i=1}^{5}P(B\cap A_i)$$

اما از آنچه در احتمال شرطی مشاهده کردیم داریم:

$$P(B\mid A_i)=\frac{P(B\cap A_i)}{P(A_i)} \Rightarrow P(B\cap A_i)=P(A_i)P(B\mid A_i)$$

۱ـ مفهوم افراز صرفاً جهت استفاده در قانون احتمال کل بیان شده است و طرح سؤال از آن در ارزشیابی مد نظر نیست.

۲ـ نماد Σ که سیگما خوانده می‌شود برای نمایش جمع چند عبارت مورد استفاده قرار می‌گیرد.

و بنابراین رابطهٔ پرکاربرد زیر حاصل خواهد شد :

$$P(B)=\sum_{i=1}^{5}P(A_i)P(B\mid A_i)$$

حال اگر فرض کنیم در حالت کلی A_1، A_2، … و A_n پیشامدهایی باشند که بر روی فضای نمونه‌ای S یک افراز تشکیل داده باشند و B یک پیشامد دلخواه باشد، رابطهٔ زیر حاصل خواهد شد که به آن **قانون احتمال کل** می‌گوییم :

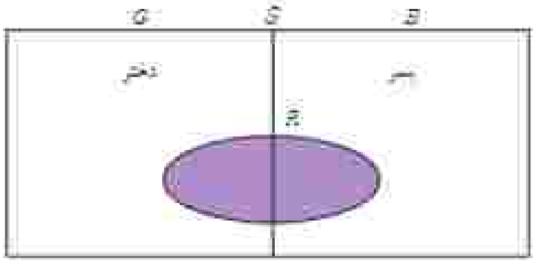
$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(B\cap A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)$$

مثال : اگر احتمال انتقال نوعی بیماری خاص به نوزاد پسر ۰/۰۸ و نوزاد دختر ۰/۰۳ باشد و خانواده‌ای قصد بچه‌دار شدن داشته باشد، به چه احتمالی نوزاد آنها به بیماری مذکور مبتلا خواهد شد؟

قبل از اینکه مسئلهٔ فوق را حل کنیم فرض کنید یکی از اعداد زیر جواب مسئلهٔ فوق است. حدس بزنید کدام عدد می‌تواند جواب باشد؟ برای رد کردن گزینه‌هایی که فکر می‌کنید نادرست‌اند، دلیل بیاورید.

۱   ۰/۹   ۰/۰۸   ۰/۰۵۵   ۰/۰۳   ۰/۰۱   ۰

حل :



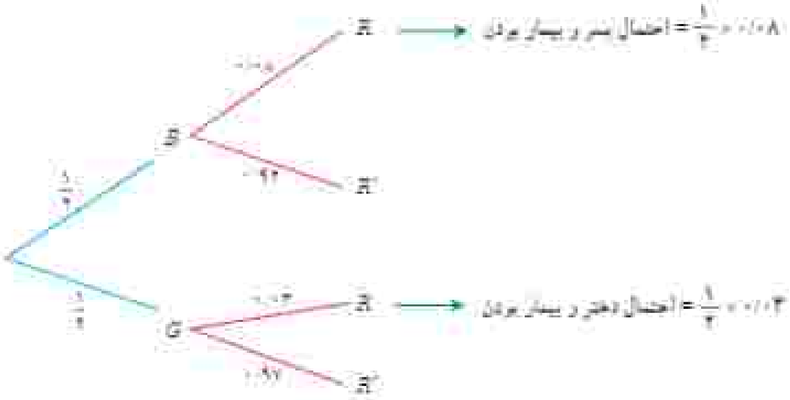
از آنجا که در ابتدا نسبت نوزادان بیمار به کل نوزادان را نداریم، لذا نمی‌توانیم به‌طور مستقیم احتمال مورد نظر را محاسبه نماییم. اما می‌دانیم نسبت نوزادان پسر بیمار به کل نوزادان پسر برابر $\frac{۸}{۱۰۰}$ و همین نسبت برای نوزادان دختر $\frac{۳}{۱۰۰}$ است و احتمال پسر (دختر) بودن نوزاد نیز $\frac{۱}{۲}$ است. بنابراین با توجه به قانون احتمال کل خواهیم داشت :

P(بیمار بودن) = P(پسر بودن) . P(بیمار بودن | پسر بودن) + P(دختر بودن) . P(بیمار بودن | دختر بودن)

و اگر پیشامد پسر بودن را با B و دختر بودن را با G و بیمار بودن را با R نمایش دهیم داریم :

$$P(R)=P(B)P(R\mid B)+P(G)P(R\mid G)=\frac{۱}{۲}\times\frac{۸}{۱۰۰}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۱۰۰}=\frac{۱۱}{۲۰۰}$$

برای حل این مثال می‌توان از نمودار درختی نیز استفاده کرد. به نمودار درختی زیر دقت کنید و علت نوشتن هر عدد و راه‌حل ارائه شده را شرح دهید.



$\Rightarrow$ احتمال بیمار بودن = $\frac{۱}{۲}\times$ ۰/۰۸ + $\frac{۱}{۲}\times$ ۰/۰۳

مثال : ۴ ظرف یکسان داریم. در اولین ظرف ۱۴ مهره قرار دارد که ۴ تای آنها قرمز است. در ظرف دوم همه مهره‌ها قرمزند. در ظرف سوم ۸ مهره قرار دارد که ۶ تای آنها قرمزند و در ظرف چهارم هیچ مهرهٔ قرمزی وجود ندارد. با چشم بسته یکی از ظرف‌ها را انتخاب کرده و از آن یک مهره بیرون می‌آوریم. احتمال اینکه مهرهٔ انتخابی قرمز باشد چقدر است؟

حل : پیشامد انتخاب ظرف‌ها را به‌ترتیب با A_1، A_2، A_3 و A_4 و پیشامد خارج شدن مهرهٔ قرمز را با B نمایش می‌دهیم. بنابراین به دنبال یافتن $P(B)$ هستیم و داریم :

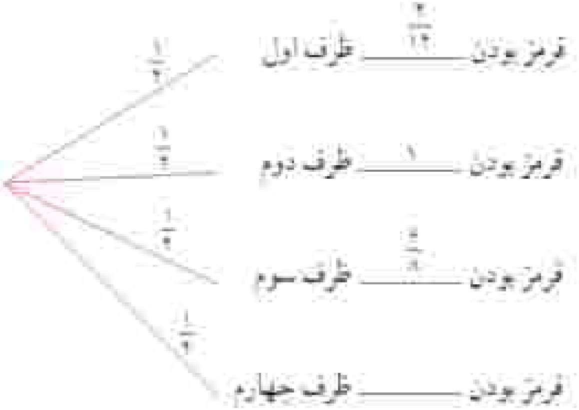
$$P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=P(A_4)=\frac{1}{4}$$

$$P(B|A_1)=\frac{4}{14}\qquad P(B|A_2)=1\qquad P(B|A_3)=\frac{6}{8}\qquad P(B|A_4)=0$$

$$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)+P(A_4)P(B|A_4)$$

$$=\frac{1}{4}\times\frac{4}{14}+\frac{1}{4}\times1+\frac{1}{4}\times\frac{6}{8}+\frac{1}{4}\times0=\frac{57}{112}$$

با نمودار درختی به صورت زیر نیز می‌توان مسئله را حل کرد :



احتمال اینکه مهرهٔ قرمزی خارج شود و از ظرف اول باشد $\frac{1}{4}\times\frac{4}{14}$

احتمال اینکه مهرهٔ قرمزی خارج شود و از ظرف دوم باشد $\frac{1}{4}\times1$

احتمال اینکه مهرهٔ قرمزی خارج شود و از ظرف سوم باشد $\frac{1}{4}\times\frac{6}{8}$

احتمال اینکه مهرهٔ قرمزی خارج شود و از ظرف چهارم باشد $\frac{1}{4}\times0$

مثال : سامان در یک مسابقه شرکت کرده است. سه بسته سؤال که یکی شامل سؤال‌های ادبیات، یکی ریاضی و یکی اطلاعات عمومی است، وجود دارد. اگر بستهٔ سؤال‌های ادبیات را به او بدهند، به احتمال ۹۰ درصد برنده خواهد شد. اگر بستهٔ سؤال‌های ریاضی را به او بدهند، به احتمال ۶۰ درصد و اگر بستهٔ سؤال‌های اطلاعات عمومی را به او بدهند، به احتمال ۸۵ درصد برنده خواهد شد. در صورتی که با چرخاندن عقربهٔ چرخان در شکل مقابل نوع سؤال‌هایی که به او داده می‌شود مشخص شود تعیین کنید او به چه احتمالی برنده خواهد شد؟

حل : اگر انتخاب ادبیات، ریاضی و اطلاعات عمومی را به‌ترتیب با A_1، A_2 و A_3 و برنده شدن سامان را با B نمایش دهیم، خواهیم داشت :

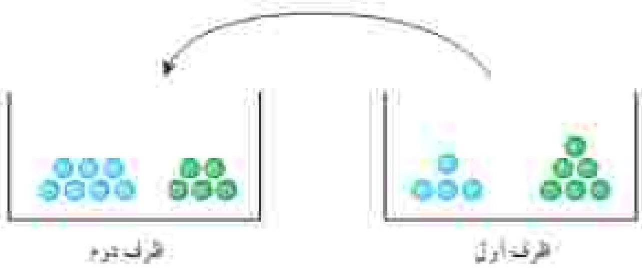
$$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{90}{100}+\frac{1}{6}\times\frac{60}{100}+\frac{1}{3}\times\frac{85}{100}=\frac{5}{6}$$

مثال : دو ظرف یکسان داریم. ظرف اول شامل ۶ مهرهٔ سبز و ۴ مهرهٔ آبی و ظرف دوم شامل ۵ مهرهٔ سبز و ۷ مهرهٔ آبی است. از ظرف اول به تصادف یک مهره انتخاب کرده، در ظرف دوم قرار می‌دهیم. سپس یک مهره از ظرف دوم انتخاب می‌کنیم. به چه احتمالی این مهره سبز است؟

حل : مهرهٔ انتخاب شده از ظرف اول یا سبز است و یا آبی. اگر این پیشامدها را به‌ترتیب با G و B و پیشامد انتخاب مهرهٔ سبز از ظرف دوم را با A نمایش دهیم خواهیم داشت : $P(B)=\frac{4}{10}$ و $P(G)=\frac{6}{10}$ و $P(A|G)=\frac{6}{13}$ (چرا؟) و $P(A|B)=\frac{5}{13}$ (چرا؟). در این صورت داریم :

$$P(A)=P(G)P(A|G)+P(B)P(A|B)=\frac{6}{10}\times\frac{6}{13}+\frac{4}{10}\times\frac{5}{13}=\frac{56}{130}$$



تمرین‌ها

۱ دو جعبه داریم. درون یکی از آنها ۱۲ لامپ قرار دارد که ۴ تا از آنها معیوب است و درون جعبهٔ دیگر ۹۶ لامپ قرار دارد که ۴ تا از آنها معیوب‌اند. به تصادف جعبه‌ای انتخاب کرده، یک لامپ از آن بیرون می‌آوریم. چقدر احتمال دارد لامپ مورد نظر معیوب باشد؟

۲ فرض کنید جمعیت یک کشور متشکل از ۲۰ درصد کودک و نوجوان، ۵۰ درصد میانسال و ۳۰ درصد سالمند باشند و شیوع یک بیماری خاص در این دسته‌ها به‌ترتیب ۳ درصد، ۵ درصد و ۱ درصد باشد. اگر فردی به تصادف از این جامعه انتخاب شود، با چه احتمالی به بیماری مورد نظر مبتلا است؟

۳ یک سکه را پرتاب می‌کنیم و اگر پشت بیاید ۳ سکهٔ دیگر را با هم پرتاب می‌کنیم. در این آزمایش احتمال اینکه دقیقاً یک سکه رو ظاهر شود چقدر است؟

۴ در یک جعبه ۵ ساعت دیواری از نوع A، ۲ تا از نوع B و ۱۵ تا از نوع C وجود دارد و احتمال اینکه عمر آنها از ۱۰ سال بیشتر باشد برای نوع A، $\frac{2}{5}$، برای نوع B، $\frac{9}{10}$ و برای نوع C، $\frac{1}{2}$ است. به تصادف یک ساعت از کارتن بیرون می‌آوریم. با چه احتمالی عمر این ساعت بیش از ۱۰ سال است؟

۵ مینا در انتخاب رشتهٔ خود برای تحصیل در دبیرستان بین سه رشتهٔ ریاضی، تجربی و انسانی مردد است. اگر او رشتهٔ ریاضی را انتخاب کند، به احتمال ۰/۴۵، اگر تجربی را انتخاب کند به احتمال ۰/۱ و اگر انسانی را انتخاب کند به احتمال ۰/۳ در آزمون ورودی دانشگاه پذیرفته خواهد شد. اگر احتمال اینکه او رشتهٔ ریاضی را انتخاب کند ۰/۱، احتمال اینکه رشتهٔ تجربی را انتخاب کند ۰/۶ و احتمال اینکه رشتهٔ انسانی را انتخاب کند ۰/۳ باشد، با چه احتمالی در دانشگاه پذیرفته خواهد شد؟

۶ مدرسهٔ A سه برابر مدرسهٔ B دانش‌آموز دارد. ۲۵ درصد دانش‌آموزان مدرسهٔ A و ۱۵ درصد دانش‌آموزان مدرسهٔ B معدلی بالای ۱۸ دارند. اگر همهٔ دانش‌آموزان هر دو مدرسه در یک محوطه حاضر باشند و به تصادف یکی از آنها را انتخاب کنیم :

الف) با چه احتمالی فرد انتخابی از مدرسهٔ A و با چه احتمالی از مدرسهٔ B است؟ ب) با چه احتمالی فرد انتخابی معدلی بالای ۱۸ دارد؟

منابع

فارسی :

۱ـ استوارت، جیمز. (۱۲-۲۰). حساب دیفرانسیل و انتگرال. ترجمهٔ حمیدی، ارشک. جلد اول. تهران : انتشارات فاطمی (۱۳۹۵).

۲ـ اسدی، محمدباقر. رنجبری، علی. ریحانی، ابراهیم. طاهری‌تنجانی، محمدتقی. قربانی آرانی، مجتبی. بین‌باشیان، هادی. (۱۳۹۶). حسابان (۱) ــ پایهٔ یازدهم دورهٔ دوم متوسطه، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی. وزارت آموزش و پرورش. تهران : شرکت چاپ و نشر کتابهای درسی ایران.

۳ـ اصلاح‌پذیر، بهمن. بروجردیان، ناصر. ریحانی، ابراهیم. طاهری‌تنجانی، محمدتقی و عالمیان، وحید. (۱۳۹۵). حسابان سال سوم متوسطه. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی. وزارت آموزش و پرورش. تهران : شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران.

۴ـ امیری، حمیدرضا. بیژن‌زاده، محمدحسن. بهرامی‌سامانی، احسان. حیدری‌قزلجه، رضا. داورزنی، محمود. ریحانی، ابراهیم. سیدصالحی، محمدرضا. قربانی آرانی، مجتبی. (۱۳۹۵). ریاضی (۱) ــ پایهٔ دهم دورهٔ دوم متوسطه، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی. وزارت آموزش و پرورش. تهران : شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران.

۵ـ ایرانمنش، علی. جمالی، محسن. ربیعی، حمیدرضا. ریحانی، ابراهیم. شاهورانی، احمد و عالمیان، وحید. (۱۳۹۲). ریاضیات(۲) سال دوم آموزش متوسطه. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی. وزارت آموزش و پرورش. تهران : شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران.

۶ـ بهزاد، مهدی. رجالی، علی. عبیدی، علی و محمودیان، عبادالله. (۱۳۹۳). ریاضیات گسسته، دورهٔ پیش‌دانشگاهی، رشتهٔ علوم ریاضی. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی. وزارت آموزش و پرورش. چاپ بیستم. تهران : شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران.

۷ـ بیژن‌زاده، محمدحسن. رحیمی، زهرا. سیدصالحی، محمدرضا. شرقی، هوشنگ و نصیری، محمود. (۱۳۹۶). هندسه (۲)، پایهٔ یازدهم دورهٔ دوم متوسطه، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، دفتر تألیف کتاب‌های درسی عمومی و متوسطه نظری، تهران : شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران.

۸ـ بیژن‌زاده، محمدحسن. پاشا، عین‌الله. یوحنایی، که‌کو. (۱۳۹۰). ریاضی عمومی. دوره پیش‌دانشگاهی، رشته تجربی. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی. وزارت آموزش و پرورش. تهران : شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران.

۹ـ بیژن‌زاده، محمدحسن. عالمیان، وحید و فرشادی، غلامعلی. (۱۳۹۶). حساب دیفرانسیل و انتگرال، دورهٔ پیش‌دانشگاهی ــ رشتهٔ علوم ریاضی. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی. وزارت آموزش و پرورش. چاپ ششم. تهران : شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران.

۱۰ـ تلگینی، محمود. خردپژوه، فروزان. رجالی، (۱۳۷۸). حساب دیفرانسیل و انتگرال ۱ و ۲. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، تهران : شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران.

۱۱ـ حاجی‌بابایی، جواد. رستمی، محمدهاشم. ظهوری زنگنه، بیژن. غلام‌آزاد، سهیلا. گویا، زهرا. نیوشا، جعفر. اصلاح‌پذیر، بهمن. بروجردیان، ناصر. رحمانی، عزیزه. رضوی، اسدالله و میرمحمد رضایی، مرتضی. (۱۳۷۵). هندسه (۲)، سال سوم آموزش متوسطه، رشتهٔ ریاضی و فیزیک، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، تهران: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران.

۱۲ـ حیدری قزلجه، رضا. خداکرم، سهیلا. ریحانی، ابراهیم. سید صالحی، محمدرضا. قربیرزی عراقی، محمدعلی. قصاب، علی و کمیجانی، آناهیتا. (۱۳۹۶). ریاضی (۲) ـ پایهٔ یازدهم دورهٔ دوم متوسطه، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی. وزارت آموزش و پرورش. تهران: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران.

۱۳ـ رحیمی، زهرا. سیدصالحی، محمدرضا. شرقی، هوشنگ و نصیری، محمود. (۱۳۹۵)، هندسه (۱)، پایهٔ دهم دورهٔ دوم متوسطه، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، دفتر تألیف کتاب‌های درسی عمومی و متوسطهٔ نظری، تهران: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران.

۱۴ـ رستمی، محمدهاشم. (۱۳۷۹). مکان هندسی، مکان‌های هندسی وابسته به نقطه‌های ثابت (یک نقطه، دو نقطه، ...، n نقطه)، تهران: سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، انتشارات مدرسه.

۱۵ـ رستمی، محمدهاشم. عطوفی، عبدالحمید. گودرزی، محمد. امیری، حمیدرضا. (۱۳۹۵). ریاضیات ۳. سال سوم علوم تجربی. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی. وزارت آموزش و پرورش. تهران: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران.

۱۶ـ ریحانی، ابراهیم. رحیمی، زهرا. کلاهدوز، فهیمه. نوروزی، سپیده. بافتیان، نرگس. شریف‌پور، شقایق. عابدی، ریابه. کتابدار، زهره. سیدصالحی، محمدرضا. امیری، محمدرضا. ایزدی، مهدی. زمانی، ایرج. بهرامی سامانی، احسان. ونگ، حسن. میرباشیان، هادی و شیرو، محمد. (۱۳۹۵). تحلیل خط‌مشی‌ها، اسناد مصوب، پژوهش‌ها و منابع معتبر مرتبط با حوزهٔ یادگیری ریاضی، واحد تحقیق، توسعه و آموزش ریاضی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی.

۱۷ـ فروند، جان. (۱). آمار ریاضی. ترجمهٔ وحیدی اصل، قاسم و عمیدی، علی. تهران: انتشارات نشر دانشگاهی.

انگلیسی:

18- Berchie Holliday .(2008) California Algebra 2. Concepts, Skills, and Problem Solving. Glencoe/McGraw-Hill.

19- Bittinger, M. L., Ellenbogen, D., & Surgent, S. A. (2000). Calculus and its applications. Reading, MA, Harlow: Addison-Wesley.

20- Briggs, W. L., Cochran, L., & Gillett, B. (2014). Calculus for scientists and engineers: Early transcendentals. Pearson Education.

21- Cohen D., Lee T. & Sklar D. (2010). Precalculus: A Problems-Oriented Approach. Sixth Edition, Brooks/Cole.

22- Hemmerling, E. M., & Hemmerling, E. M. (1964). Fundamentals of college geometry. Wiley.

23- Hughes-Hallett, D., Gleason, A. M., Flath, D., Lock, P. F., Gordon, S. P., Lomen, D. O., ... & Pasquale, A. (1998). Calculus: Single Variable. Wiley.

24- Larson, Ron. & Hodgkins, Amme V. (2013). college algebra and calculus an applied approach. The Pennsylvania State University, The Behrend College, second edition.

25- Lial, M. L., Greenwell, R. N., & Ritchey, N. P. (2008). Calculus with applications. Pearson/Addison Wesley.

26- Lial, M., Greenwell, R., & Ritchey., N. (2017). Calculus with Applications. Pearson Education.

27- Rogawski, J., & Adams, C. (2015). Calculus: Early Transcendentals. Palgrave Macmillan.

28- Serra, M. (1997). Discovering geometry. An Inductive Aproach

29- Sullivan, M. (2008). Algebra and Trigonometry. Eighth edition, Pearson Prentice Hall.

30- Sullivan, M. (2015). Precalculus: Concepts Through Functions A Unit Circle Approach To Trigonometry. Third edition, Pearson Education.

سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی جهت ایفای نقش خطیر خود در اجرای سند تحول بنیادین در آموزش و پرورش و برنامه درسی ملی جمهوری اسلامی ایران، مشارکت معلمان را به‌عنوان یک سیاست اجرایی مهم دنبال می‌کند. برای تحقق این امر در اقدامی نوآورانه سامانه تعاملی بر خط اعتبارسنجی کتاب‌های درسی راه‌اندازی شد تا با دریافت نظرات معلمان دربارهٔ کتاب‌های درسی نونگاشت، کتاب‌های درسی را در اولین سال چاپ، با کمترین اشکال به دانش‌آموزان و معلمان ارجمند تقدیم نماید. در انجام مطلوب این فرایند، همکاران گروه تحلیل محتوای آموزشی و پرورشی استان‌ها، گروه‌های آموزشی و دبیرخانهٔ راهبری دروس و مدیریت محترم پروژه آقای محسن باهو نقش سازنده‌ای را بر عهده داشتند. ضمن ارج نهادن به تلاش تمامی این همکاران، اسامی دبیران و هنرآموزانی که تلاش مضاعفی را در این زمینه داشته و با ارائهٔ نظرات خود سازمان را در بهبود محتوای این کتاب یاری کرده‌اند به شرح زیر اعلام می‌شود.

اسامی دبیران و هنرآموزان شرکت کننده در اعتبارسنجی کتاب ریاضی ۳ ـ کد ۱۱۲۲۱۱

ردیف	نام و نام خانوادگی	استان محل خدمت	ردیف	نام و نام خانوادگی	استان محل خدمت
۱	یوسف امیریان	کرمانشاه	۳۰	ریحانه حسینی نژاد	زنجان
۲	سوده عزیززاده	شهرستان‌های تهران	۳۱	وحید سخت‌پور	کهگیلویه و بویراحمد
۳	فریبا حیدری	گیلان	۳۲	زهره محمدی	چهارمحال و بختیاری
۴	زهره رشیدیان	مرکزی	۳۳	محمد [illegible]	کرمان
۵	ایرج نیری	ایلام	۳۴	بیژن ابراهیمیان	خراسان شمالی
۶	زهره قنبری	شهرستان‌های تهران	۳۵	لیلا مقصودی	مازندران
۷	ملیکه راستی	ایلام	۳۶	رضا رحیمی	آذربایجان غربی
۸	معصومه عیوضی	قزوین	۳۷	[illegible]	خراسان جنوبی
۹	شهین قلی‌زاده	سیستان و بلوچستان	۳۸	[illegible]	گیلان
۱۰	پروین [illegible]	کردستان	۳۹	حسن کریمی نژاد	قزوین
۱۱	سمیه قربان‌زاده	خراسان شمالی	۴۰	سید محمدرضا احمدی	اصفهان
۱۲	ابوذر نخعی مطلق	سیستان و بلوچستان	۴۱	ملیکه حبیبی	لرستان
۱۳	آزاده حاجی هاشمی	خوزستان	۴۲	وحیده سلیمانی	گلستان
۱۴	معصومه مالکی	آذربایجان شرقی	۴۳	[illegible]	آذربایجان شرقی
۱۵	غلامرضا [illegible]	فارس	۴۴	علی رضا [illegible]	آذربایجان شرقی
۱۶	ملیحه [illegible]	اصفهان	۴۵	لیلا حسین‌پور	بوشهر
۱۷	[illegible]	خوزستان	۴۶	پروانه [illegible]	هرمزگان
۱۸	مصطفی [illegible]	شهر تهران	۴۷	[illegible]	خوزستان
۱۹	ژاله روحانی	همدان	۴۸	[illegible]	مازندران
۲۰	[illegible]	فارس	۴۹	[illegible]	خوزستان
۲۱	عزیز شمسی	کردستان	۵۰	شهره [illegible]	چهارمحال و بختیاری
۲۲	یعقوب [illegible]	اردبیل	۵۱	وحیده قائمی	خراسان جنوبی
۲۳	محمد [illegible]	کرمانشاه	۵۲	مجید قنبری	هرمزگان
۲۴	[illegible]	همدان	۵۳	[illegible]	زنجان
۲۵	فرزانه [illegible]	لرستان	۵۴	محمد علی [illegible]	یزد
۲۶	معصومه [illegible]	خراسان رضوی	۵۵	حسین [illegible]	خراسان رضوی
۲۷	[illegible]	یزد	۵۶	خسرو کریمی	[illegible]
۲۸	فاطمه [illegible]	البرز	۵۷	[illegible]	کرمانشاه
۲۹	فرزانه [illegible]	شهر تهران	۵۸	علی جعفری	[illegible]